MAC499 - Trabalho de Formatura Supervisionado

$\mathcal{S}$-caminhos

Marcio Takashi Iura Oshiro

Orientador: José Coelho de Pina

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Ciência da Computação

Financiado parcialmente pela FAPESP (processo 06/54065-2)

Resumo

Este texto se refere a um projeto de iniciação científica do qual participei durante minha graduação. Na iniciação científica, estudei a teoria e algoritmos relacionados ao problema de encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. A fórmula min-max de Mader para este problema tem como conseqüência as fórmulas de Menger para o número máximo de RS-caminhos disjuntos, de Tutte-Berge para o número máximo de arestas em um emparelhamento e de Gallai para o número máximo de T-caminhos disjuntos.

Sumário

Parte técnica

1 Introdução

Otimização combinatória é a área da matemática aplicada que estuda problemas nos quais queremos maximizar ou minimizar uma função sobre um conjunto. Como conjuntos são estruturas discretas, uma estratégia ingênua para resolver tais problemas é enumerar todas as possibilidades e verificar qual possui valor maior, se o problema for de maximização, ou menor se for de minimização. No entanto, o número de possibilidades, apesar de finita, em geral é exponencialmente grande. Isso torna a estratégia ingênua inviável.

Apesar de considerar apenas estruturas discretas, muitas técnicas de otimização combinatória surgiram da otimização contínua. Como exemplo temos a sub-área conhecida como combinatória poliédrica, onde são estudadas técnicas derivadas de conceitos de programação linear. Outro exemplo é programação inteira, onde os problemas são modelados como programas lineares com a restrição das variáveis serem inteiras.

Aplicações de otimização combinatória podem ser encontradas em projetos de sistemas de distribuição de energia elétrica, posicionamento de satélites, projetos de computadores e de chips VLSI, roteamento ou escalonamento de veículos, alocação de trabalhadores ou máquinas a tarefas, empacotamento de caixas em containeres, corte de barras e placas, seqüenciamento de genes e DNA, classificação de plantas e animais, etc.

O objetivo do projeto de iniciação científica foi o estudo da teoria e de algoritmos relacionados ao problema de encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos nos vértices em um grafo. Estes problemas são estudados em áreas como teoria dos grafos, otimização combinatória e pesquisa operacional. A intenção foi obter maior conhecimento da área de otimização combinatória.

Seja (V, E) um grafo, T uma parte de V e $\mathcal{S}$ uma partição de T. Um $\mathcal{S}$-caminho é um caminho com pontas em partes distintas de $\mathcal{S}$.

O problema de encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos tem uma forte relação com emparelhamentos, de tal forma que ele generaliza o problema de encontrar emparelhamentos máximos em grafos. Por isso passei boa parte do projeto estudando emparelhamentos.

A fórmula min-max de Mader para o número máximo de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos tem como conseqüências as fórmulas de Menger para o número máximo de RS-caminhos disjuntos, de Tutte-Berge para o número máximo de arestas em um emparelhamento e de Gallai para o número máximo de T-caminhos disjuntos. Basicamente, uma fórmula min-max é uma relação que diz que o tamanho de mínimo de um certo conjunto é igual ao tamanho máximo de um outro conjunto. Isto está bastante relacionado com o conceito de dualidade em programação linear.

O projeto de iniciação científica foi mais de interesse teórico do que prático, mas certamente existem aplicações para alguns dos problemas estudados.

Por exemplo, o caso mais geral de encontrar caminhos disjuntos possui aplicações em várias áreas, como comunicação em tempo-real, desenho de circuitos VLSI, roteamento e controle de admissão em redes.

2 Grafos, caminhos e outras definições

Um **grafo** é um par (V, E), onde V é um conjunto finito qualquer e E é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de V. Os elementos de V são chamados vértices e os elementos de E são chamados arestas. Se G é um grafo então $V(G)$ é seu conjunto de vértices e $E(G)$ é seu conjunto de arestas.

Se u e v são vértices em V e $\{u, v\}$, ou simplesmente uv, é uma aresta em E, então u e v são as **pontas** da aresta uv. Além disso, dizemos que u e v são **adjacentes** ou **vizinhos**. Se $X \subseteq V$, chamamos de vizinhança de X no grafo G o conjunto $\Gamma_G(X) \subseteq V$ de vértices vizinhos a algum vértice de X, ou simplesmente $\Gamma(X)$ se G estiver implícito. Consideramos apenas os vizinhos que não estão em X, ou seja, $X \cap \Gamma(X) = \emptyset$.

Chamamos de **grau** do vértice v o valor $|\Gamma(\{v\})|$. Se um grafo possui grau k em todos os seus vértices, ele é chamado de **k-regular**.

Se G é um grafo, dizemos que H é um **subgrafo** de G, ou simplesmente $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H é chamado **gerador** de G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Se $H = G[X]$ e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$, então H é o subgrafo de G **induzido** (ou **gerado**) por X, isto é, H é tal que $V(H) = X$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm as duas pontas em X. De forma análoga podemos definir subgrafos induzidos por um conjunto de arestas.

Se $X \subseteq V(G)$, denotamos por $G - X$ o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus X$. Se $F \subseteq E(G)$, denotamos por $G - F$ o subgrafo de G obtido removendo-se as arestas em F. Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde a é um vértice ou aresta de G.

Um **caminho** em um grafo G é uma seqüência $\langle v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, a_n, v_n\rangle$ tal que v_i é um vértice em $V(G)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, a_i é uma aresta em $E(G)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, os vértices são dois a dois distintos e $a_i = v_{i-1}v_i$. Dizemos que v_0 e v_n são **pontas** do caminho e os demais vértices são chamados de **vértices internos**. Se P é um caminho com pontas v_0 e v_n com o menor número de arestas possíveis, então P é chamado de **caminho mais curto** entre v_0 e v_n. Por conveniência podemos denotar um caminho apenas por sua seqüência de vértices ou sua seqüência de arestas. Em muitos caso tratamos caminhos como um subgrafo de G.

Considere o caminho $P = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$, onde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vértices, então o caminho $\langle v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \rangle$ é denotado por $P - v_n$ e o caminho $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n, u \rangle$, onde u é um vértice adjacente a v_n e não aparece em P, é denotado por $P + u$.

Um grafo é denominado **bipartido** se seu conjunto de vértices pode ser particionado em duas partes, digamos A e B, de tal forma que cada aresta do grafo possua uma ponta em A e outra em B. Denotaremos tal grafo por (A, B, E), onde E é seu conjunto de arestas.

3 Emparelhamentos

Um **emparelhamento** de um grafo é um conjunto de arestas que são independentes, isto é, arestas sem pontas em comum (ver figura 3).

Dizemos que um emparelhamento é máximo se não existe outro emparelhamento com cardinalidade maior. Usaremos a $\nu(G)$ para denotar a cardinalidade de um emparelhamento máximo do grafo G.

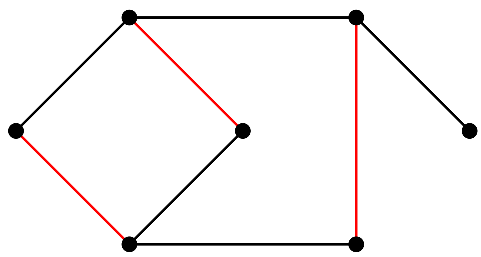

Figura 1: Exemplo de um emparelhamento. Note que o emparelhamento é máximo.

Emparelhamentos e conceitos relacionados são usados para modelar uma variedade de problemas. Muitos desses problemas são bem resolvidos, isto é, podem ser resolvidos em tempo polinomial. No entanto, para resolvê-los é necessário utilizar técnicas complicadas.

Além de ser um tópico clássico de teoria dos grafos, emparelhamento tem tido, nos últimos cem anos, um papel catalítico no desenvolvimento de vários dos novos e mais gerais métodos combinatórios.

3.1 Breve histórico

As duas pessoas que são consideradas as principais fundadoras da teoria dos emparelhamentos são Julius Petersen e Dénes Kőnig. Costuma-se associar Petersen ao estudo de grafos regulares, e Kőnig ao estudo de grafos bipartidos.

Em 1891, Petersen reformulou um problema de fatoração algébrica, devido a Hilbert, como um problema de fatoração de grafos. De forma geral, ele estudou o problema de decidir quais grafos regulares têm uma fatoração não trivial em subgrafos geradores regulares menores.

Em seguida, ele provou que qualquer grafo regular de grau par pode ser expresso como uma união de circuitos disjuntos nos vértices. Este resultado está bastante relacionado famoso resultado de Euler sobre o problema das pontes de Kőnigsberg (1736). Euler mostrou que é possível passar por todas as arestas de um grafo uma única vez e voltar ao vértice de início se e somente se o grafo for conexo e todos os vértices tiverem grau par.

Petersen observou que a fatoração de grafos regulares de grau ímpar é um problema muito mais difícil. Ele provou que qualquer grafo conexo 3-regular com não mais do que duas pontes tem um emparelhamento perfeito, ou seja, pode ser decomposta. Além disso, provou que duas pontes é o melhor possível, apresentando um grafo 3-regular com três pontes e que não possui emparelhamento perfeito. Petersen atribuiu este grafo a Sylvester (figura 2b).

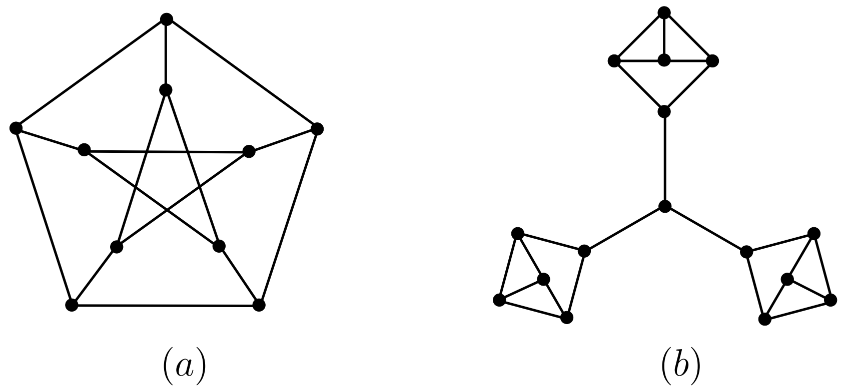

Figura 2: (a) grafo de Petersen (b) grafo de Sylvester

Petersen também estudou a famosa conjectura das quatro cores. Em 1898, provou que a afirmação de Tait, de que se um grafo cúbico fosse "poliedral", então poderia ser fatorado em três emparelhamentos perfeitos, estava errada. Para isso mostrou um grafo não-planar que é cúbico e não tem pontes, mas que não podia ser decomposto em três emparelhamentos perfeitos disjuntos. Este grafo, conhecido como grafo de Petersen (figura 2a), tem grande importância em teoria dos grafos e serve como contra-exemplo para várias conjecturas.

Em 1931, Kőnig provou um dos mais importantes resultados em teoria dos emparelhamentos, relacionando o tamanho de um emparelhamento máximo ao tamanho de uma cobertura mínima por vértice. Tal resultado ficou conhecido como teorema min-max de Kőnig. No mesmo ano, Egerváry generalizou esse resultado para grafos com pesos não negativos nas arestas.

A importância de relações min-max vem aumentando em vários ramos da combinatória, devido principalmente ao aumento do uso de programação linear para formular e resolver muitos problemas combinatórios. Relações min-max também são freqüentemente usadas como critério de parada e certificado de correção de vários algoritmos.

Kőnig também mostrou que o teorema de Menger sobre conectividade, o teorema dos casamentos de Frobenius e o teorema dos representantes distintos de Hall são conseqüências de seu teorema min-max. Na verdade esses quatro resultados são equivalentes.

Com relação a emparelhamentos em grafos arbitrários (não necessariamente bipartido), considera-se que os pioneiros são Tutte e Edmonds. Em 1947, Tutte apresentou uma caracterização para grafos arbitrários que contém emparelhamentos perfeitos. Berge, em 1958, derivou, dessa caracterização, uma relação min-max, conhecida como fórmula de Tutte-Berge, para o número máximo de arestas em um emparelhamento máximo.

As primeiras idéias de como encontrar emparelhamentos máximos, surgiram no trabalhos de Kőnig e Egerváry em 1930, mas estavam restritas a grafos bipartidos. No entanto, o primeiro algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos foi apresentado por Kuhn em 1956. Kuhn classificou os algoritmos baseados nas idéias de Kőnig e Egerváry, como o dele, de método húngaro.

Para grafos arbitrários, o primeiro algoritmo polinomial só apareceu em 1965 e foi encontrado por Edmonds. Tal algoritmo motivou Edmonds a sugerir uma forma melhor de medir eficiência de algoritmos, como por exemplo tempo polinomial, e isso foi uma grande contribuição para teoria da computação.

3.2 Caminhos alternantes e teorema de Berge

Um problema clássico da teoria dos grafos é o de encontrar emparelhamentos máximos. Berge demonstrou que esse problema está intimamente relacionado com a existência dos chamados caminhos de aumento.

Seja M um emparelhamento. Dizemos que um caminho é M**-alternante**, ou apenas **alternante** caso o emparelhamento seja implícito, se ele contém alternadamente arestas em M e fora de M. Um caminho alternante é de **aumento** se suas pontas são vértices **livres**, ou seja, se não existem arestas do emparelhamento que contém tais vértices.

Lema 1. *Se P é um caminho de aumento e M um emparelhamento em um grafo, então $P \triangle M$ é um emparelhamento com cardinalidade maior que a de M, onde $\triangle$ indica a operação de diferença simétrica.*

Prova. Sejam P' e P'' subconjuntos de $E(P)$ tais que $P' = E(P) \cap M$ e $P'' = E(P) \setminus P'$. Pela definição de caminho de aumento, temos que P' e P'' são emparelhamentos e

$|P''| > |P'|$. Além disso, $P \triangle M = (M \setminus P') \cup P''$ é um emparelhamento, pois a intersecção de P'' com M é vazia. □

Teorema 2 (Berge, 1957)**.** *Um emparelhamento M de um grafo é máximo se e somente se não existem caminhos de aumento.*

Prova. Seja M um emparelhamento máximo. Então é trivial que não existem caminhos de aumento, caso contrário, pelo lema 1, M não seria máximo.

Agora, sejam M um emparelhamento que não possui caminhos de aumento e M' um emparelhamento máximo. Então $M \triangle M'$ é um emparelhamento que consiste de caminhos M-alternantes e circuitos pares com alternação de arestas em M e M'. Como M não tem caminhos de aumento em G, então todo caminho M-alternante em $M \triangle M'$ tem o mesmo número de aresta em M e em M'. Logo $|M| = |M'|$ e como M' é um emparelhamento máximo, temos que M também é um emparelhamento máximo. □

3.3 Kőnig, Hall e Frobenius

Existem resultados muito interessantes e úteis na teoria dos emparelhamentos que são aplicados apenas a grafos bipartidos. Devido a tais resultados, o problema de encontrar emparelhamentos máximos se torna muito mais fácil do que para grafos arbitrários.

Teorema de Kőnig

Um dos teoremas mais importantes da teoria dos emparelhamentos é conhecido como teorema min-max de Kőnig. Este teorema diz que o tamanho de um emparelhamento máximo é o mesmo de uma cobertura mínima por vértice se o grafo for bipartido.

Uma **cobertura por vértices** de um grafo G (ou do seu conjunto de arestas) é um subconjunto de vértices de G tal que toda aresta de G tem pelo menos uma ponta nesse subconjunto. Se K é uma cobertura por vértices de um grafo G, dizemos que K cobre G ou que G é coberto por K. Uma cobertura por vértices é mínima se não existe outra cobertura por vértices de cardinalidade menor. Definimos uma **cobertura por arestas** de forma análoga.

Denotaremos por $\tau(G)$ a cardinalidade de uma cobertura mínima por vértice do grafo G.

Teorema 3 (Kőnig, 1931)**.** *Se G é um grafo bipartido, então temos que $\tau(G) = \nu(G)$.*

Prova. Seja $G = (A, B, E)$ um grafo bipartido e M um emparelhamento máximo de G. Considere um conjunto de vértices U construído da forma descrita a seguir. Para cada

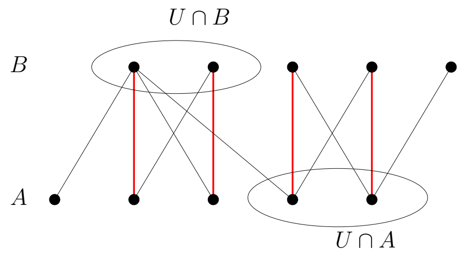

Figura 3: Exemplo da construção de U.

aresta ab de M, suponha que a está em A e b em B, se existe um caminho alternante de b até um vértice livre em A, então coloque b em U, caso contrário coloque a.

Por construção, sabemos que $|U| = |M|$ e U cobre todas as arestas de M. Basta provar que U também cobre as arestas do grafo que não estão em M, ou seja, toda aresta fora de M tem uma ponta em U.

Seja ab uma aresta de G que não está em M e com a em A e b em B. Como M é um emparelhamento máximo, então existe uma aresta $a'b'$ em M tal que $a = a'$ ou $b = b'$, caso contrario, $M \cup \{ab\}$ é um emparelhamento maior que M, o que é uma contradição.

Suponha que $a = a'$. Se a' está em U, não há nada a provar. Então suponha que a' não está em U. Logo b' está em U e existe um caminho alternante P de b' até algum vértice livre em A. Se P contém ab, então $(P - b') - a'$ é um caminho alternante de b até algum vértice livre em A e portanto b está em U. Caso contrário, $(P + a) + b$ também é um caminho alternante como o anterior e portanto b está em U.

Agora suponha que não exista aresta $a'b'$ em M tal que $a = a'$. Então, a é um vértice livre e portanto ba é um caminho alternante de b até um vértice livre de A. Logo b está em U. Então U é uma cobertura por vértices.

É claro que toda cobertura por vértices precisa ter pelo menos um vértice para cada aresta do emparelhamento, isto é, $\tau(G) \geq \nu(G)$. Como $|U| = |M|$, temos que $\tau(G) = \nu(G)$ □

Uma das conseqüências do teorema de Kőnig é que podemos facilmente encontrar uma cobertura mínima por vértice em um grafo. Isso porque existem algoritmos eficientes para encontrar emparelhamentos em grafos bipartidos. Um exemplo é o método húngaro de Kuhn (1955). Também existem algoritmos eficientes para encontrar emparelhamentos em grafos arbitrários, como o dado por Edmonds [5].

A conseqüência citada anteriormente é muito interessante, pois o problema de encontrar uma cobertura mínima por vértice em grafos arbitrários é sabidamente NP-difícil. Informalmente, isso significa que o consumo de tempo de qualquer algoritmo conhecido que resolve o problema de encontrar tal cobertura cresce muito rapidamente (exponencialmente) a medida que o número de vértices ou arestas do grafo cresce.

Teorema de Hall

Em um grafo bipartido $G = (A, B, E)$ dizemos que G tem um emparelhamento de A em B se existe um emparelhamento de G que cobre todos os vértices de A. Existe uma condição necessária trivial para que G tenha tal emparelhamento e é dada pelo lema a seguir.

Lema 4. *Seja $G = (A, B, E)$ um grafo bipartido. Se G tem um emparelhamento de A em B, então $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.*

Prova. Seja M um emparelhamento de A em B de G. Defina $H := G[M]$ de G. É claro que para todo $S \subseteq A$ temos $|\Gamma_G(S)| \geq |\Gamma_H(S)| = |S|$. □

Hall, em 1935, provou que a condição necessária do lema 4 também é suficiente.

Teorema 5 (Hall, 1935)**.** *Seja $G = (A, B, E)$ um grafo bipartido. Então G tem um emparelhamento de A em B se e somente se $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$.*

Prova. A condição necessária já foi provada pelo lema 4. Então basta provar a suficiência. A prova será por indução na cardinalidade de A.

Seja $G = (A, B, E)$ um grafo bipartido tal que $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$. Suponha que G não tem emparelhamento de A em B. Seja M um emparelhamento máximo de G. Por suposição, sabemos que M não cobre A, logo existe um vértice v em A que é livre. Seja Z o conjunto de vértices acessíveis a partir de v através de caminhos alternantes.

Como M é máximo, então v é o único vértice livre em Z, caso contrário teríamos um caminho de aumento e M não seria máximo. Seja $S := Z \cap A$ e $T := Z \cap B$. Então, pela definição de Z, temos que existe um emparelhamento de $S \setminus \{v\}$ em T contido em M. Logo $|T| = |S \setminus \{v\}| = |S| - 1$.

É claro que $T \subseteq \Gamma(S)$. Além disso, $\Gamma(S) \subseteq T$, pois, se existe algum vértice x adjacente a algum $y \in S$, então $x \in B$ e o caminho alternante de v até y concatenado com a aresta yx é um caminho alternante, logo $x \in T$ e $\Gamma(S) = T$. Mas então, temos $|\Gamma(S)| = |T| = |S| - 1$, ou seja, $|\Gamma(S)| < |S|$, o que é uma contradição.

Portanto se $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq A$, então existe um emparelhamento de A em B. □

A princípio, o teorema de Hall não foi provado no contexto de emparelhamentos em grafos bipartidos, mas para um problema de teoria dos conjuntos, conhecido como sistema de representantes distintos.

Sejam $S_1, S_2, \ldots, S_n$ subconjuntos, não necessariamente disjuntos, de um conjunto S. Queremos saber quando é possível encontrar n elementos $s_i \in S_i$ distintos. O conjunto desses n elementos é chamado de sistema de representantes distintos.

O teorema de Hall para o sistema de representantes distintos é enunciado da forma a seguir.

Teorema 6. *Uma coleção de conjuntos $\mathcal{C} := \{S_1, \ldots, S_n\}$ tem um sistema de representantes distintos se e somente se para todo $k \in \{0, \ldots, n\}$, a união de quaisquer k dos conjuntos de $\mathcal{C}$ tem cardinalidade pelo menos k.*

Para verificar que os teoremas 5 e 6 são o mesmo, mas enunciados de forma diferentes, basta montar um grafo bipartido $G = (A, B, E)$ tal que $A := \mathcal{C}$ e $B := \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ e existe uma aresta ligando um vértice S_i de A a um vértice s de B somente se $s \in S_i$.

Para todo $A' \subseteq A$ temos $|\Gamma(A')| = |\bigcup_{S_i \in A'} S_i|$. Logo $\mathcal{C}$ tem um sistema de representante distinto se e somente se G tem um emparelhamento de A em B. Mas isso só é possível se $|\Gamma(A')| = |\bigcup_{S_i \in A'} S_i| \geq A'$.

Teorema de Frobenius

Outro problema clássico da teoria dos emparelhamentos é o de encontrar emparelhamentos perfeitos em grafos. Um emparelhamento é **perfeito** se ele cobre todos os vértices do grafo.

É comum exemplificar o problema de encontrar um emparelhamento perfeito no contexto de casamentos. Por exemplo, dado n homens, n mulheres e uma relação de homens que cada mulher gosta, queremos encontrar uma maneira de casá-los de forma que toda mulher se case com um homem de quem ela goste.

No caso de casamentos consideramos grafos bipartidos, pois dividimos os vértices entre homens e mulheres. Um teorema de Frobenius, também chamado de teorema do casamento, caracteriza grafos bipartidos com emparelhamentos perfeitos.

Teorema 7 (Frobenius, 1917)**.** *Um grafo $G = (A, B, E)$ bipartido tem um emparelhamento perfeito se e somente se $|A| = |B|$ e para todo $S \subseteq A$, temos $\Gamma(S) \geq |S|$.*

Note que este teorema é um caso particular do teorema 5.

Um resultado interessante, que é obtido pelo teorema anterior, dá uma condição suficiente para um grafo bipartido k-regular ter um emparelhamento perfeito.

Corolário 8. *Todo grafo bipartido k-regular, $k > 0$, tem um emparelhamento perfeito.*

Prova. Seja $G = (A, B, E)$ um grafo bipartido k-regular, $k > 0$. Logo $k|A| = |E(G)|$ e $k|B| = |E(G)|$, ou seja, $|A| = |B|$. Considere um subconjunto S de A, o conjunto E_1 de arestas incidentes a S e o conjunto E_2 de arestas incidentes a $\Gamma(S)$. Então $|E_1| = k|S|$ e $|E_2| = k|\Gamma(S)|$. Pela definição de $\Gamma(S)$ e o fato do grafo ser bipartido e k-regular, temos que $E_1 \subseteq E_2$. Logo $|E_2| \geq |E_1|$ e como $k > 0$, temos $|\Gamma(S)| \geq |S|$. Portanto, pelo teorema 7, G tem um emparelhamento perfeito. $\square$

O interessante do teorema de Frobenius é que ele não apenas mostra uma condição necessária para um grafo bipartido possuir um emparelhamento perfeito, mas também mostra que tal condição também é suficiente.

3.4 Fórmula de Tutte-Berge

Seria muito bom se existisse um resultado parecido com o teorema 7, que caracteriza emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos, para grafos arbitrários. Tal resultado existe e foi provado por Tutte em 1947.

Considere $c_o(G)$ o número de componentes ímpares de G, isto é, componentes com número ímpar de vértices.

Teorema 9 (Tutte, 1947)**.** *Um grafo G tem um emparelhamento perfeito se e somente se $c_o(G - U) \leq |U|$ para todo subconjunto U de $V(G)$.*

Então para mostrar que um grafo não tem emparelhamento perfeito, basta apresentar um subconjuntos U de vértices tal que $G-U$ tenha pelo menos $|U|+1$ componentes. Tal conjunto U é chamada de **Tutte-set**.

Após Tutte provar o teorema 9 que caracteriza grafos que possuem emparelhamento perfeito, em 1958 Berge observou que esse teorema implicava uma fórmula min-max para o tamanho de um emparelhamento máximo de um grafo arbitrário. Essa fórmula ficou conhecida como fórmula de Tutte-Berge.

Veremos uma demonstração dessa fórmula que não usa o teorema 9 e em seguida mostraremos como derivar esse teorema da fórmula de Tutte-Berge.

Um grafo G é chamado de **fator-crítico** se para todo vértice v de G, temos que $G - v$ tem um emparelhamento perfeito. Isso implica que $\nu(G) = \frac{|V(G)|-1}{2}$, logo G tem número ímpar de vértices. Gallai deu uma condição suficiente para um grafo ser fator-crítico.

Lema 10 (Gallai, 1963)**.** *Seja G um grafo conexo tal que $\nu(G) = \nu(G - v)$ para todo vértice v do grafo. Então G é fator-crítico.*

Prova. Se $\nu(G) = \nu(G - v)$ para todo $v \in V(G)$, então $\nu(G) < \frac{|V(G)|}{2}$ e não existe um vértice do grafo que é coberto por todos os emparelhamentos máximos.

Provaremos que nesse caso $\nu(G) = \frac{|V(G)|-1}{2}$. Para isso suponha que um emparelhamento máximo M deixa dois vértices livres, digamos u e v. Escolha M, u e v tais que o tamanho do caminho mais curto entre u e v em G seja o menor possível, mas tenha mais do que uma aresta, caso contrário u e v são adjacentes e $M \cup \{uv\}$ é um emparelhamento maior que M. Seja x um vértice interno do menor caminho de u a v.

Como não existe um vértice que é coberto por todo emparelhamento máximo, então existe um emparelhamento máximo N que não cobre x. Seja N tal que $|M \cap N|$ seja maximal. Como u e v foram escolhidos de forma que o caminho mais curto entre eles é minimal, então N cobre u e v. Então existe um vértice y que não é coberto por N, mas é coberto por M, pois M e N cobrem o mesmo número de vértices. Seja yz uma aresta em M. Então z é coberto por alguma aresta e em N, caso contrário $N \cup \{e\}$ seria um emparelhamento maior que N. Mas então, se trocarmos e por yz em N, temos que

N continua sendo um emparelhamento máximo que não cobre x, mas com intersecção com M maior, contradizendo a escolha de N.

Logo $\nu(G) = \frac{|V(G)|-1}{2}$. Então $\nu(G-t) = \frac{|V(G-t)|}{2}$ para todo vértice t de G, ou seja, para todo vértice t, vale que $G-t$ tem um emparelhamento perfeito. $\square$

Teorema 11 (Tutte-Berge, 1958)**.** *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então*

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - c_o(G - U)).$$

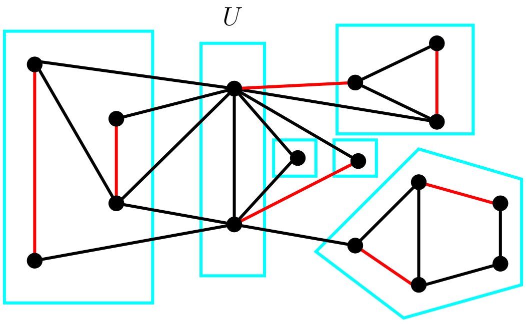

Figura 4: U e componentes de $G - U$.

Prova. Note que para todo subconjunto U de V temos que $\nu(G) \leq |U| + \nu(G-U)$ e $\nu(G-U) \leq \frac{1}{2}(|V \setminus U| - c_o(G-U))$. Então

$$\nu(G) \leq |U| + \frac{1}{2}(|V \setminus U| - c_o(G-U)) = \frac{1}{2}(|V \setminus U| - c_o(G-U)).$$

Provaremos o outro sentido da inequação por indução em $|V|$. Podemos supor que G é conexo, caso contrário basta tratar cada componente separadamente. Se $|V| = 0$ então é fácil ver que a fórmula vale, então considere que $|V| > 0$.

Suponha que existe um vértice v que é coberto por todo emparelhamento máximo de G. Então $\nu(G) = \nu(G-v) + 1$ e por hipótese de indução existe um subconjunto U' de $V \setminus \{v\}$ tal que

$$\nu(G-v) = \frac{1}{2}(|V \setminus \{v\}| + |U'| - c_o(G-v-U')).$$

Logo se tomarmos $U = U' \cup \{v\}$ temos

$$\nu(G) = \nu(G-v)+1 = \frac{1}{2}(|V \setminus \{v\}| + |U'| - c_o(G-v-U')) + 1 = \frac{1}{2}(|V| + |U| - c_o(G-U)).$$

Agora considere que tal vértice v não existe, então para todo vértice u do grafo existe um emparelhamento máximo que não o cobre, isto é, $\nu(G) = \nu(G-u)$. Então pelo lema 10 o grafo é fator-crítico. Logo $\nu(G) = \frac{|V|-1}{2}$ e $|V|$ é ímpar.

Portanto tomando $U = \emptyset$ temos que $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V| + |U| - c_o(G-U))$. □

Podemos ver que o teorema 9 pode ser visto como uma conseqüência direta da fórmula de Tutte-Berge. Isso porque todo grafo G que possui um emparelhamento perfeito temos $\nu(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$. Logo, pela fórmula de Tutte-Berge, para todo $U \subseteq V(G)$ temos que $|U| \geq c_o(G-U)$.

Note que um subconjunto U de V que dá o valor mínimo na fórmula de Tutte-Berge é um Tutte-set.

Conhecendo o tamanho de um emparelhamento máximo podemos saber a **deficiência** do grafo, isto é, o número de vértices que um emparelhamento máximo não cobre. Denotaremos a deficiência de um grafo G por $\mathrm{def}(G)$. Então $\mathrm{def}(G) = |V| - 2\nu(G)$. Pela fórmula de Tutte-Bege temos que

$$\begin{aligned}
\nu(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{\frac{1}{2}(|V(G)| + |X| - c_o(G-X))\} \\
\iff 2\nu(G) = \min_{X \subseteq V(G)} \{|V(G)| + |X| - c_o(G-X)\} \\
\iff 2\nu(G) = |V(G)| + \min_{X \subseteq V(G)} \{|X| - c_o(G-X)\} \\
\iff 2\nu(G) = |V(G)| - \max_{X \subseteq V(G)} \{c_o(G-X) - |X|\} \\
\iff |V(G)| - 2\nu(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{c_o(G-X) - |X|\} \\
\iff \mathrm{def}(G) = \max_{X \subseteq V(G)} \{c_o(G-X) - |X|\}
\end{aligned}$$

Portanto $\mathrm{def}(G) = \max_{X \subseteq V(G)}\{c_o(G-X) - |X|\}$.

3.5 Decomposição de Gallai-Edmonds

Um grafo que não tem emparelhamento perfeito pode ter vários Tutte-sets. Uma pergunta natural seria se existe algum Tutte-set que é melhor que os outros, no sentido de fornecer mais informações sobre o grafo.

Em 1964, Gallai provou a existência de uma decomposição do grafo que fornece tal Tutte-set. A existência de tal decomposição também foi provada em 1965, de forma independente, por Edmonds que também mostrou como obtê-la eficientemente com seu algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A chamada decomposição de Gallai-Edmonds é a partição de V em $D(G)$, $A(G)$ e $C(G)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D(G) :=& \{v \in V \ : \ \text{ existe algum emparelhamento máximo que não cobre } v\}; \\ A(G) :=& \Gamma(D(G)); \\ C(G) :=& V \setminus (D(G) \cup A(G)). \end{aligned}$$

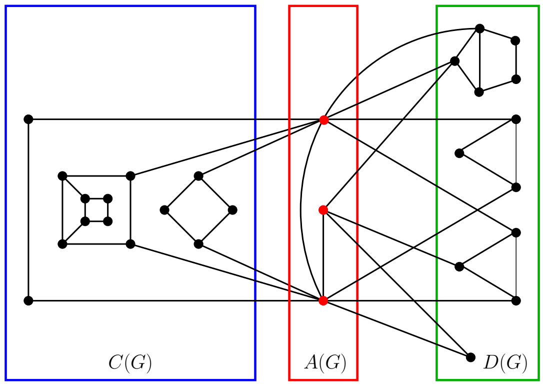

Figura 5: Decomposição de Gallai-Edmonds.

Com a decomposição de Gallai-Edmonds podemos obter muitas informações sobre o grafo.

Lema 12. *Seja* $u \in A(G)$. *Então* $A(G-u) = A(G) - u$, $D(G-u) = D(G)$ *e* $C(G-u) = C(G)$.

Prova. Seja $u \in A(G)$, então todo emparelhamento máximo cobre o vértice u. Se $D(G-u) = D(G)$, pela decomposição de Gallai-Edmonds, vale que $A(G-u) = A(G)-u$ e $C(G-u) = c(G)$. Logo, basta provar que $D(G-u) = D(G)$.

Sejam $v \in D(G)$ e M_v um emparelhamento máximo de G que não cobre v. Considere que e é a aresta em M_v com uma das pontas em u. Logo $M_v - e$ é um emparelhamento máximo de $G-u$, pois como $u \in A(G)$ temos $\nu(G-u) < \nu(G)$. Mas $M_v - e$ não cobre v, então $v \in D(G-u)$. Portanto $D(G) \subseteq D(G-u)$.

Agora, sejam $x \in D(G-u)$ e M'_x um emparelhamento máximo em $G-u$ que não cobre x. Sejam $y \in D(G)$ um vértice adjacente a u e M_y um emparelhamento máximo em G que não cobre y. Se M_y não cobre x, então $x \in D(G)$. Logo, suponha que M_y cobre x.

Então $M'_x \cup M_y$ consiste de circuitos pares alternantes e caminhos alternantes, pois M'_x e M_y são emparelhamentos em G. Como M'_x não cobre x, o componente de $M'_x \cup M_y$ que contém x é um caminho alternante P começando em x.

Se P termina em uma aresta de M'_x, então P tem comprimento par e, dessa forma, $M_y \triangle E(P)$ é um emparelhamento máximo de G que não cobre x. Logo $x \in D(G)$.

Então considere que P termina em uma aresta de M_y. Então P termina em u, caso contrário seria um caminho de aumento em relação a M'_x, o que é um contradição, pois M'_x é máximo. Mas então $M_y \triangle E(P + \{uy\})$ é um emparelhamento máximo em G que não cobre x. Logo $x \in D(G)$ e, assim, $D(G-u) \subseteq D(G)$.

Portanto temos que $D(G) = D(G-u)$ e conseqüentemente $A(G-u) = A(G) - u$ e $C(G-u) = C(G)$.. □

Um emparelhamento **quase perfeito** é aquele que cobre todos os vértices do grafo menos um.

Teorema 13 (Teorema estrutural de Gallai-Edmonds)**.** *Sejam G um grafo e os conjuntos $A(G)$, $C(G)$ e $D(G)$ da decomposição de Gallai-Edmonds de G. Então:*

1. *cada componente de $G[D(G)]$ é fator-crítico;*

2. *$G[C(G)]$ tem emparelhamento perfeito;*

3. *qualquer emparelhamento máximo de G contém um emparelhamento perfeito de $G[C(G)]$, emparelhamentos quase perfeitos dos componentes de $G[D(G)]$ e cobre $A(G)$ com arestas ligando vértices de $A(G)$ a vértices em componentes distintos de $G[D(G)]$;*

4. *$\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - c(G[D(G)]) + |A(G)|)$, onde $c(G[D(G)])$ denota o número de componentes de $G[D(G)]$.*

Prova. Removendo os vértices de $A = A(G)$ um por um, o lema 12 nos garante que a cada passo estamos removendo um vértice de $A(G)$ (logo $\nu(G-A) = \nu(G) - |A|$), $C(G-A) = C(G)$ e $D(G-A) = D(G)$. Além disso, se M é um emparelhamento máximo de G, então $M \cap E(G-A)$ é um emparelhamento máximo de $G-A$.

Sejam G_1, G_2, …, G_t os componentes de $G-A$ contidos em $G[D(G)]$, note que estes são os componentes de $G[D(G)]$. Como $D(G-A) = D(G)$, então cada vértice de G_i não é coberto por algum emparelhamento máximo de $G-A$. Logo, pelo lema 10, G_i é fator-crítico, provando (1), portanto possui um emparelhamento quase perfeito.

Como $C(G-A) = C(G)$ não tem nenhum vizinho em $D(G-A)$, qualquer emparelhamento máximo de $G-A$ cobre $G[C(G-A)]$ com um emparelhamento perfeito, provando (2). Logo qualquer emparelhamento máximo de $G-A$ contém um emparelhamento perfeito de $G[C(G)]$ e um emparelhamento quase perfeito de cada G_i.

Seja M um emparelhamento máximo qualquer de G. Como $M \cap E(G-A)$ é um emparelhamento máximo de $G-A$, então $M \cap E(G[C(G)])$ é um emparelhamento perfeito de $G[C(G)]$ e $M \cap E(G_i)$ é um emparelhamento quase perfeito de G_i. Logo, $|M \cap E(G-A)| = \nu(G-A) = |M| - |A|$ e portanto M não contém arestas com pontas em A, caso contrário teríamos $|M \cap E(G - A)| > |M| - |A|$. Então toda aresta e de M com uma ponta em A tem a outra ponta em $G - A$. Mas $M \cap E(G[C(G)])$ é um emparelhamento perfeito, logo e tem a outra ponta em algum G_i. Como $M \cap E(G_i)$ é um emparelhamento quase perfeito, cada aresta e tem uma ponta em um componente G_i diferente, provando (3).

A prova de (4) do fato de que $\nu(G - A) = \nu(G) - |A|$ e de (1) e (2).

$$\begin{aligned}\nu(G) = \nu(G-A) + |A| &= \sum_{i=1}^{t} \frac{|V(G_i)| - 1}{2} + \frac{|C(G)|}{2} + |A| \\ &= \frac{1}{2}(|V(G)| - t + |A|) = \frac{1}{2}(|V(G)| - c(G[D(G)]) + |A|).\end{aligned}$$

□

3.6 Algoritmos

Existem algoritmos eficientes para o problema de encontrar emparelhamentos máximos, tanto pra grafos bipartidos quantos para grafos arbitrários. Em seguida veremos um algoritmo para o caso de grafos bipartidos, e dois para o caso de grafos arbitrários.

Método húngaro

O teorema de Kőnig sozinho não fornece um algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos. No entanto, podemos nos basear em suas idéias, juntamente com o resultado do teorema de Berge sobre caminhos alternantes para pensar em um algoritmo que encontre emparelhamentos máximos.

O método húngaro é um algoritmo que encontra um emparelhamento máximo em grafos bipartidos e, ao mesmo tempo, também encontrar uma cobertura mínima por vértice. Originalmente o método húngaro servia apenas para encontrar emparelhamentos perfeitos, mas, com uma pequena modificação, é possível encontrar um emparelhamento máximo.

Antes de ver o algoritmos, primeiro definirei alguns conceitos necessários.

Uma **árvore** é um grafo onde todo par de vértices é ligado por um único caminho. Uma definição equivalente de árvore é um grafo com $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Chamamos de **floresta** um grafo que é a união de árvores disjuntas.

Se M é um emparelhamento de G, dizemos que $H \subseteq G$ é uma **árvore M-alternante** com raiz u, se $u \in V(H)$ é um vértice livre e, para todo $v \in V(H)$, o único caminho de u para v é um caminho alternante. Uma floresta é M-alternante se todas as árvores contida nela forem M-alternantes.

Dado um grafo $G = (A, B, E)$ bipartido, os passos do algoritmo são dados abaixo.

1. Comece com um emparelhamento M qualquer de G
2. Seja A' e B' o conjunto de vértices livres de A e B respectivamente.
3. Construa uma floresta M-alternante maximal F. Isso pode ser feito por uma busca em largura (ou profundidade) em cada vértice de A'.
4. Se existe uma aresta ligando $V(F) \cap A$ a algum vértice b de B', então existe em F um caminho de aumento P de b até algum vértice em A'. Então, considere o emparelhamento $M' := M \triangle P$, que é maior que M e volte para o passo 2.
5. Caso contrário M é máximo, pois não há mais caminhos de aumento. Além disso, o conjunto $(A \setminus V(F)) \cup (V(F) \cap B)$ é uma cobertura mínima por vértice de G.

Algoritmo de Edmonds

Não é difícil verificar que um grafo é bipartido se e somente se não possui circuitos com número ímpar de arestas, que chamaremos apenas de circuito ímpar.

O algoritmo de Edmonds tem um funcionamento parecido com o do método húngaro. Ele vai "crescendo" florestas alternantes e aumentando o emparelhamento sempre que possível. A diferença está no tratamento no caso de encontrar algum circuito ímpar. Outra diferença é que o não obtemos uma cobertura mínima por vértice, pois a relação min-max de Kőnig não vale para grafos não bipartidos, mas podemos obter a decomposição de Gallai-Edmonds.

Sejam G um grafo e M um emparelhamento não perfeito de G, caso contrário não há nada a fazer. Seja S o conjunto de vértices livres, $S \neq \emptyset$, senão também não há nada a fazer.

Considere uma floresta M-alternante F. Então cada vértice de S é raiz de uma árvore de F diferente. Chamamos os vértices de F que estão a uma distância ímpar de um vértice de S de ímpares e os demais de pares. Note que os vértices ímpares tem grau dois em F.

Se existe um vértice x par em F que possui um vizinho y fora de F, então considere a aresta $yz \in M$, pois $y \notin S$. Logo podemos trocar F por $F + xy + yz$ que é uma floresta M-alternante maior.

Se F tem dois vértices pares vizinhos em componentes diferentes, então através da aresta que liga esse dois vértices obtemos um caminho de aumento conectando as raízes dos componentes desses dois vértices. Logo, obtemos um emparelhamento maior e geramos uma nova floresta.

Se F tem dois vértices pares, digamos u e v, vizinhos no mesmo componente, então o único caminho entre u e v mais a aresta uv formam um circuito ímpar C. Seja P o caminho da raiz até C, que é único (se C passa pela raiz, então P contém apenas a raiz). Claramente P é um caminho alternante, logo tomando $M_1 = M \triangle E(P)$ obtemos um novo emparelhamento de mesmo tamanho que M.

Então C é um circuito com $2k + 1$ arestas, para algum $k > 0$, tal que contém k arestas de M_1 e é disjunto nos vértices das outras arestas de M_1. Edmonds provou que neste caso podemos construir um novo grafo G' contraindo C, ou seja, substituindo C por um novo vértice que é adjacente a $\Gamma(C)$. Então $M' = M \setminus E(C)$ é um emparelhamento máximo de G' se e somente se M é máximo em G. Logo, procuramos um emparelhamento máximo em G' que é um grafo menor e com um circuito ímpar a menos que G.

Se todo vértice par tem apenas vértices ímpares com vizinhos então M é um emparelhamento máximo. Se p é o número de vértices ímpares e q é o número de vértices pares, então $q - p = |S|$, pois todo vértice ímpar está ligado a um vértice par por uma aresta de M. Se removermos todos os vértices ímpares do grafo, os vértices pares passam a ficar isolados. Logo, $\operatorname{def}(G) \geq q - p = |S|$, ou seja, M é um emparelhamento máximo.

Uma observação interessante é que o conjunto de vértices ímpares no final do algoritmo é o conjunto $A(G)$ da decomposição de Gallai-Edmonds.

Algoritmo baseado na decomposição de Gallai-Edmonds

Este algoritmo foi apresentado por Lovász e Plummer e é baseado na decomposição de Gallai-Edmonds. Segundo eles, este algoritmo pode ser adaptado para resolver qualquer problema que possua uma estrutura do tipo da de Gallai-Edmonds.

Seja G um grafo. Seja $\mathcal{L} = (M_1, \ldots, M_t)$ uma lista de emparelhamentos de G com exatamente k vértices. Considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{L}) :=& \{v \in V(G) \ : \ v \notin V(M_i) \text{ para algum } 1 \leq i \leq t\};\\
A(\mathcal{L}) :=& \Gamma(D(\mathcal{L}));\\
C(\mathcal{L}) :=& V \setminus (D(\mathcal{L}) \cup A(\mathcal{L})).
\end{aligned}$$

Podemos notar que se $\mathcal{L}$ contém todos os emparelhamentos máximos de G, então $D(\mathcal{L}) = D(G)$, $A(\mathcal{L}) = A(G)$ e $C(\mathcal{L}) = C(G)$.

A seguir descreverei a idéia do algoritmo de maneira informal.

Lema 14. *Seja $\mathcal{L}$ uma lista de emparelhamentos de G, contendo exatamente k arestas. Seja $M \in \mathcal{L}$. Se M não tem arestas ligando vértices de $A(\mathcal{L})$ a vértices de $A(\mathcal{L}) \cup C(\mathcal{L})$ e contém um emparelhamento quase perfeito de cada componente de $G[D(\mathcal{L})]$, então M é um emparelhamento máximo.*

Prova. Cada componente de $G[D(\mathcal{L})]$ é ímpar, pois possuem um emparelhamento quase perfeito, e possui um vértice livre ou ligado a um vértice em $A(\mathcal{L})$ por uma aresta. Também temos que as aresta de M com uma ponta em $A(\mathcal{L})$ e a outra em $D(\mathcal{L})$, cobrem $A(\mathcal{L})$, pois todo vértice de $A(\mathcal{L})$ é coberto por um emparelhamento em $\mathcal{L}$. Então $G[D(\mathcal{L})]$ tem exatamente $|A(\mathcal{L})| + |V(G) \setminus V(M)|$ componentes.

Logo $\text{def}(G) \geq c_o(G - A(\mathcal{L})) - |A(\mathcal{L})| = |V(G) - V(M)|$, portanto M é um emparelhamento máximo. □

Para encontrar emparelhamentos máximos, podemos começar com uma lista $\mathcal{L}$ qualquer (pode ser vazia). Seja M um emparelhamento qualquer em $\mathcal{L}$.

Se M satisfaz a condição em 14, então M é máximo e podemos parar, além disso, $D(\mathcal{L}) = D(G)$, $A(\mathcal{L}) = A(G)$ e $C(\mathcal{L}) = C(G)$.

Se M não satisfaz tal condição, então podemos encontrar um emparelhamento M' a partir de M que tem mesmo número de arestas de M e aumenta $|D(\mathcal{L})|$, ou que tem mais arestas que M, então podemos começar uma nova lista de emparelhamentos.

Uma observação importante é que $|\mathcal{L}| \leq V(G)$, pois, para cada emparelhamento que inserimos em $\mathcal{L}$, aumentando $|D(\mathcal{L})|$ que não pode ser maior que $|V(G)|$.

4 RS-caminhos

Considere um grafo (V, E) e subconjuntos disjuntos R e S de V. Um RS-**caminho** é um caminho que tem uma ponta e R e a outra em S. Um problema associado a RS-caminhos, conhecido como empacotamento de RS-caminhos, consiste em encontrar no grafo o maior número possível de RS-caminhos disjuntos nos vértices.

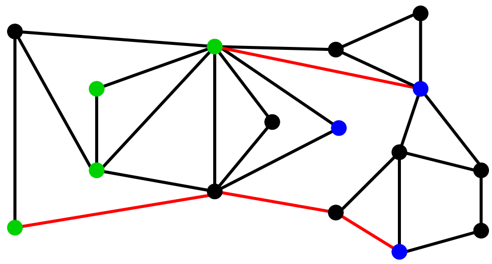

Figura 6: Exemplo de RS-caminhos. Vértices em R são verdes e em S são azuis.

Menger provou um teorema que dá uma fórmula min-max para o número máximo de RS-caminhos. Existem várias versões desse teorema que permitem aos RS-caminhos ter pontas em comum, o grafo ser orientado, ou que os caminhos sejam disjuntos nas arestas e não nos vértices.

4.1 Fórmula de Menger

Denotaremos por RS-**desconector** um conjunto de vértices que intersecta pelo menos um vértice de cada RS-caminho.

Teorema 15 (Menger, 1927)**.** *Sejam $G = (V, E)$ um grafo e subconjuntos disjuntos R e S de V. Sejam C um conjunto de vértices RS-desconector mínimo e $\mathcal{P}$ uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos no vértices. Então $|\mathcal{P}| = |C|$.*

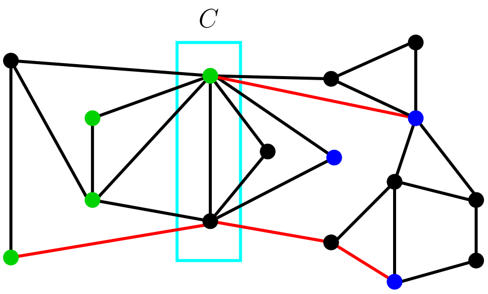

Figura 7: C é um RS-desconector.

Prova. Claramente $|C| \geq |\mathcal{P}|$, caso contrário existiria um RS-caminho em $\mathcal{P}$ que não possui vértices em C.

Agora, provaremos por indução na cardinalidade de E que $|C| \leq |\mathcal{P}|$. Se $|E| = 0$, então temos que C e $\mathcal{P}$ são vazios, logo $|C| \leq |\mathcal{P}|$.

Sejam $\mu = |C|$ e $e = uv$ uma aresta em E. Se um conjunto RS-desconector em $G - e$ tem pelo menos μ vértices, então, por hipótese de indução, existem pelo menos μ RS-caminhos disjuntos em $G - e$. Logo o mesmo vale para G e temos $\mu = |C| \leq |\mathcal{P}|$.

Suponha que $G - e$ tem um conjunto RS-desconector C' com $|C'| = \mu - 1$, então $C' \cup \{u\}$ e $C' \cup \{v\}$ são RS-desconectores em G com cardinalidade μ. Cada conjunto $R(C' \cup \{u\})$-desconector de $G - e$ tem cardinalidade pelo menos μ, pois eles são RS-desconectores em G. Então, por indução, $G - e$ contém pelo menos μ $R(C' \cup \{u\})$-caminhos disjuntos e, analogamente, pelo menos μ $(C' \cup \{v\})S$-caminhos disjuntos. Um $R(C' \cup \{u\})$-caminho intersecta um $(C' \cup \{v\})S$-caminho apenas em C', caso contrário $G - e$ teria um RS-caminho que não intersecta C'.

Então concatenando os $R(C' \cup \{u\})$-caminhos com os $(C' \cup \{v\})S$-caminhos e inserindo e entre um $R\{u\}$-caminho e um $\{v\}S$-caminho, obtemos pelo menos μ RS-caminhos em G. Logo $\mu = |C| \leq |\mathcal{P}|$. □

4.2 RS-caminhos em grafos dirigidos

Um grafo **dirigido**, ou **dígrafo**, é aquele que, ao invés de ter um conjunto de vértices, tem um conjunto de arcos. Um **arco** é um par ordenado (u, v) de vértices do grafo, assim, (u,v) e (v,u) são arcos diferentes.

A definição de caminhos em grafos dirigidos é análoga ao de grafos não dirigidos, mas todos os arcos devem ter o mesmo sentido, Por exemplo, $\langle (v_1,v_2),(v_2,v_3)\rangle$ é um caminho em um grafo dirigido, mas $\langle (v_1,v_2),(v_3,v_2)\rangle$ não é.

O teorema 15 também vale para grafos dirigidos. Para verificar isso, basta trocar arestas por arcos nas demonstração, tomando cuidado com o sentido dos arcos.

Se soubermos resolver o problema de empacotamento de RS-caminhos em dígrafos, então também sabemos resolver em grafos não dirigidos. Pois, dado um grafo $G = (V,E)$, podemos considerar o dígrafo $D = (V,A)$, onde para cada aresta uv em E, temos os arcos (u,v) e (v,u) em A.

4.3 Algoritmos

Mostrarei a seguir uma forma eficiente de resolver o problema de RS-caminhos em dígrafos, e conseqüentemente em grafos não dirigidos, usando fluxos em redes.

Dado um dígrafo $D = (V,A)$, construa o dígrafo $D' = (V',A')$ da seguinte forma. Para cada vértice $v \in V$ temos $v^-, v^+ \in V'$ e um arco $(v^+,v^-) \in A'$. Além disso, para cada arco $(u,v) \in A$ temos $(u^-,v^+) \in A'$.

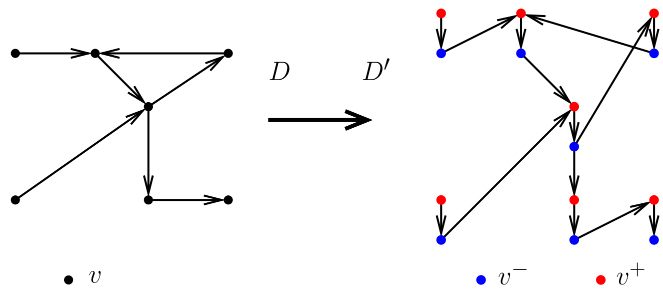

Figura 8: Ilustração da construção de D'.

Pela construção de D', se um caminho em D passa por um vértice v, então o caminho correspondente em D' passa obrigatoriamente por (v^+,v^-). Então caminhos disjuntos nas arestas em D' são disjuntos nos vértices em D.

Assim, podemos encontrar uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos nas aresta em D' que os caminhos correspondentes em D formarão uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos nos vértices em D. Para isso, basta inserir em D' dois vértices novos, digamos r e s, um arco (r,v^+) para cada vértice $v \in R$ e um arco (v^-,s) para cada vértice $v \in S$.

Atribuindo capacidade 1 para cada arco de D', podemos utilizar técnicas de fluxo em redes, como o método de Ford e Fulkerson, para encontrar um fluxo máximo de r

a s. A partir de tal fluxo obtemos uma coleção máxima de RS-caminhos disjuntos nas arestas em D'.

5 T-caminhos

Considere um grafo (V, E) e um subconjunto T de V. Chamamos os vértices em T de **terminais**. Um **T-caminho** é um caminho com pontas em vértices distintos de T. O problema associado a T-caminhos, conhecido como empacotamento de T-caminhos, consiste em encontrar no grafo uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos nos vértices.

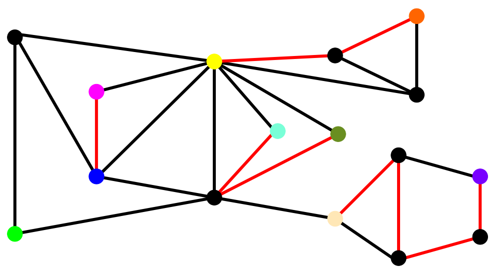

Figura 9: Exemplo de T-caminhos. Vértices em T estão coloridos.

5.1 Emparelhamentos e T-caminhos

O problema de encontrar uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos generaliza o de encontrar um emparelhamento máximo.

Considere que $T = V$, então toda aresta de um emparelhamento é um T-caminho. Como arestas de um emparelhamento são disjuntas nos vértices, então um emparelhamento máximo é uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos nos vértices.

Apesar de emparelhamento máximo ser um caso particular de coleção máxima de T-caminhos disjuntos, como veremos mais adiante, podemos encontrar tal coleção através de emparelhamentos.

Além disso, assim como existe uma relação min-max (fórmula de Tutte-Berge) para emparelhamentos, existe uma relação min-max equivalente para empacotamento de T-caminhos, provada por Gallai.

5.2 Fórmula de Gallai

A fórmula de Tutte-Berge (teorema 11) diz que

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - c_o(G - U)).$$

Veremos a seguir outra maneira de escrever essa fórmula.

Sejam G um grafo e $U_0 \subseteq V(G)$. Considere que U_1, U_2, …, U_k são os conjuntos de vértices dos componentes de $G - U_0$. Então

$$\frac{1}{2}(|V(G)| + |U_0| - c_o(G - U_0)) = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|U_i|}{2} \right\rfloor,$$

onde $c_o(G - U_0)$ é o número de componentes ímpares de $G - U_0$.

Para verificar isso suponha que U_1, U_2, …, U_q são os conjuntos de vértices dos componentes pares e U_{q+1}, U_{q+2}, …, U_k são os conjuntos de vértices dos componentes ímpares

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(|V(G)| + |U_0| - c_o(G - U_0)) \\
&\quad = \frac{|V(G)|}{2} + \left(\frac{|V(G)|}{2} - \sum_{i=1}^{k} \frac{|U_i|}{2} \right) - \frac{c_o(G - U_0)}{2} \\
&\quad = |V(G)| - \left(\sum_{i=1}^{k} |U_i| - \sum_{i=1}^{k} \frac{|U_i|}{2} \right) - \sum_{i=q+1}^{k} \frac{1}{2} \\
&\quad = |U_0| + \sum_{i=1}^{q} \frac{|U_i|}{2} + \sum_{i=q+1}^{k} \frac{|U_i| - 1}{2} \\
&\quad = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|U_i|}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Tutte-Berge provaremos a relação min-max de Gallai.

Teorema 16 (Gallai, 1961)**.** *O número máximo de T-caminhos disjuntos em um grafo é igual a*

$$\mu := \min_{U_0} |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|U_i \cap T|}{2} \right\rfloor,$$

onde $U_0 \subseteq V$ e U_1, U_2,…, U_k são os conjuntos de vértices dos componentes de $G - U_0$.

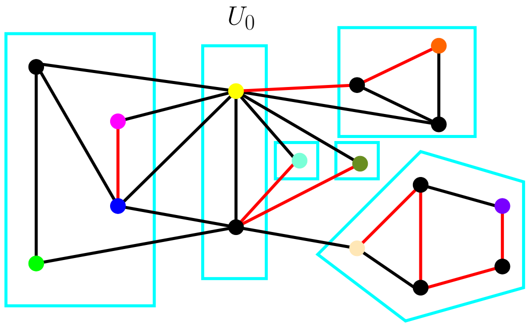

Figura 10: U_0 e componentes de $G - U_0$.

Prova. Seja $\mathcal{P}$ uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos em um grafo $G = (V, E)$.

É claro que $|\mathcal{P}| \leq \mu$, pois cada T-caminho tem um vértice em U_0 ou pelo menos dois em algum U_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Para provar que $|\mathcal{P}| \geq \mu$, considere $\widetilde{G}$ o grafo G com $V \setminus T$ duplicado, como explicado a seguir. Seja $(V \setminus T)'$ uma cópia de $V \setminus T$, então $V(\widetilde{G}) = (V \setminus T) \cup (V \setminus T)'$. Seja $v \in V \setminus T$ e sua cópia $v' \in (V \setminus T)'$. Então temos que $vv' \in E(\widetilde{G})$ e para todo $u \neq v$ em V, se $uv \in E(G)$ então $uv, uv', u'v' \in E(\widetilde{G})$.

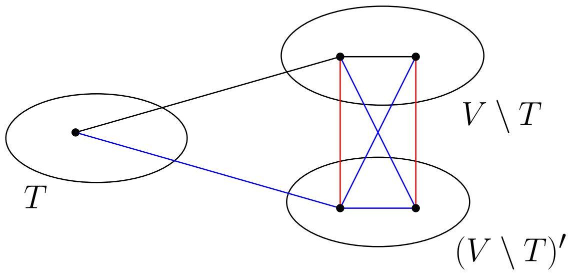

Figura 11: Ilustração da duplicação de um grafo. As arestas pretas são as originais, as azuis são as duplicadas e as vermelhas as que ligam um vértice à sua cópia.

Suponha que existe um emparelhamento M em $\widetilde{G}$ com $\mu + |V \setminus T|$ arestas. Seja $N := \{vv' — v \in V \setminus T\}$, note que N também é um emparelhamento e $|N| = |V \setminus T|$. Logo $M \cup N$ é composto por circuitos pares e caminhos M-alternantes. Como M tem μ arestas a mais que N, então em $M \cup N$ existem μ caminhos que começam e terminam em arestas de M, isto é, as pontas desses caminhos estão em T, caso contrário existiria uma aresta em N incidente a elas. Para cada um desses μ caminhos, se contrairmos as arestas em N obtemos um T-caminho em G. Portanto $|\mathcal{P}| \geq \mu$.

Agora, basta provar que o emparelhamento M existe. Para isso mostraremos que um emparelhamento máximo em $\widetilde{G}$ tem pelo menos $\mu + |V \setminus T|$ arestas, ou seja,

$$\mu' = |\widetilde{U_0}| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|\widetilde{U_i}|}{2} \right\rfloor \geq \mu + |V \setminus T|,$$

onde $\widetilde{U_0}$ é um subconjunto dos vértices de $\widetilde{G}$ e $\widetilde{U_i}$ são conjuntos de vértices dos componentes de $\widetilde{G} - \widetilde{U_0}$.

Suponha que $v \in \widetilde{U_0}$ e $v' \in \widetilde{U_i}$ para algum $i \neq 0$. Podemos tirar v de $\widetilde{U_0}$ e colocar $\widetilde{U_i}$ sem causar nenhuma outra alteração nos componentes, pois se existe uma aresta vu, $u \in \widetilde{U_j}$ para $j \neq 0$, então existe $v'u$ e portanto $j = i$. Logo tirando v de $\widetilde{U_0}$ não causará a união de dois componentes. Note também que μ' não aumenta com essa alteração. Então podemos supor que v e v' estão no mesmo componente para todo v em $V \setminus T$.

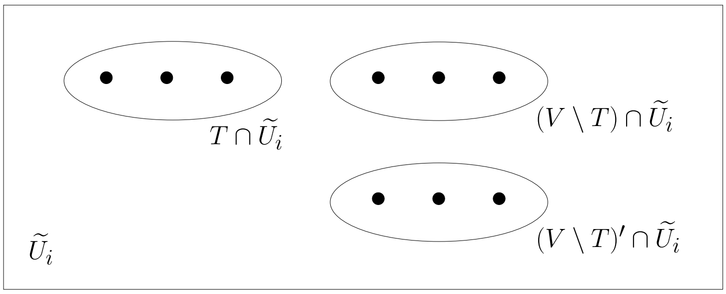

Figura 12: Particionamento de $\widetilde{U_i}$.

Cada $\widetilde{U_i}$ é composto por uma parte (pode ser vazia) de T, de $V \setminus T$ e de $(V \setminus T)'$, como ilustrado na figura 5.2. Como v e v' pertencem ao mesmo $\widetilde{U_i}$ para todo v em V e $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, temos que $|\widetilde{U_i} \cap (V \setminus T)| = |\widetilde{U_i} \cap (V \setminus T)'|$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\widetilde{U_0}| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|\widetilde{U_i}|}{2} \right\rfloor &= |U_0| + \frac{|\widetilde{U_0} \setminus T|}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|\widetilde{U_i} \setminus T| + |\widetilde{U_i} \cap T|}{2} \right\rfloor \\
&= |U_0| + |U_0 \setminus T| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|U_i \cap T|}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} |U_i \setminus T| \\
&\geq \mu + |V \setminus T|
\end{aligned}$$

□

Chamamos um subconjunto U_0 de V que dá o valor mínimo no teorema de Gallai de **Gallai-set**.

5.3 Algoritmos

Podemos encontrar uma coleção máxima de T-caminhos disjuntos, de forma eficiente, através de emparelhamentos. Para isso, usamos idéias baseadas na prova do teorema 16.

Primeiramente duplique parte do grafo, como explicado no teorema. Depois encontre um emparelhamento máximo M nesse novo grafo. Seja N o emparelhamento que consiste das aresta que ligam vértices duplicados. Então, basta encontrar caminhos M-alternantes que começam e terminam em arestas de M.

Se algum dos caminhos encontrados têm arestas de N, basta contrair a aresta, ou seja, juntar as suas pontas em um único vértice. Caso um desses caminhos tenha um vértice duplicado, basta trocá-lo pelo original, isto pode ser feito por causa da forma como a duplicação foi feita.

6 $\mathcal{S}$-caminhos

Considere um grafo (V, E), um subconjunto T de V e uma partição $\mathcal{S}$ de T. Chamamos os vértices em T de **terminais**. Um **$\mathcal{S}$-caminho** é um caminho cujas pontas estão partes distintas de $\mathcal{S}$. O problema do empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos consistem em encontrar no grafo uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos nos vértices.

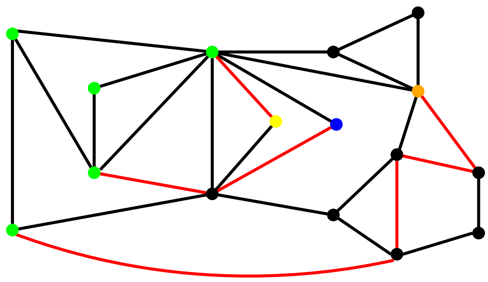

Figura 13: Exemplo de S-caminhos. Vértices em T estão coloridos e cada cor representa uma parte de $\mathcal{S}$.

6.1 Emparelhamentos, RS-caminhos, T-caminhos e $\mathcal{S}$-caminhos

O problema de empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos generaliza o de empacotamento de RS-caminhos, pois se $|\mathcal{S}| = 2$, digamos $\mathcal{S} = \{R, S\}$, então todo $\mathcal{S}$-caminho é um RS-caminho e vice-versa para um mesmo conjunto de terminais.

O problema do empacotamento de T-caminhos também é um caso particular de empacotamentos de $\mathcal{S}$-caminhos. Para ver isso, basta tomar $\mathcal{S} = \{\{v\} \ : \ v \in T\}$. Dessa forma, qualquer $\mathcal{S}$-caminho tem as pontas em T e portanto é um T-caminho.

Empacotamento de $\mathcal{S}$-caminho também generaliza o problema de encontrar um emparelhamento máximo, já que este é um caso particular de empacotamento de T-caminhos. Outra forma de ver a essa relação entre $\mathcal{S}$-caminhos e emparelhamentos é tomando $\mathcal{S} = \{\{v\} \ : \ v \in V\}$. Assim, todo emparelhamento é uma coleção de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Se em uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos existe algum $\mathcal{S}$-caminho com mais de uma aresta, então podemos encurtá-lo até que fique com apenas uma aresta sem diminuir o tamanho da coleção. Então sempre existe uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos que é um emparelhamento máximo.

6.2 Fórmula de Mader

O seguinte teorema, devido a Mader, dá uma relação min-max para o tamanho de uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Para facilita, usaremos a seguinte definição.

Chamamos de **$\mathcal{S}$-transversal** uma partição de $\mathcal{U} := \{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$ de V tal que todo $\mathcal{S}$-caminho contém um vértice de U_0 ou uma aresta com as pontas em algum U_i, para $i \geq 1$. Considere o seguinte valor:

$$c_T(\mathcal{U}) = |U_0| + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{|B_i|}{2} \right\rfloor,$$

onde B_i denota o conjunto dos vértices em $U_i \cap T$ ou têm vizinhos fora de $U_0 \cup U_i$.

Teorema 17 (Mader, 1978)**.** *O número máximo de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos em um grafo é igual a*

$$\mu := \min_{\mathcal{U}} c_T(\mathcal{U}),$$

onde $\mathcal{U}$ é uma $\mathcal{S}$-transversal.

Prova. Sejam os valores

$$\alpha(\mathcal{S}) := |\{\{u, v\} : \exists A \in \mathcal{S} \text{ com } u, v \in A\}| \text{ e}$$
$$\beta(\mathcal{S}) := |\{\{u, v\} : u \text{ e } v \text{ não são terminais simultaneamente}\}|.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que todo $A \in \mathcal{S}$ é **estável**, isto é, não existem arestas com pontas em A. Isto porque, mesmo que algum $\mathcal{S}$-caminho contenha alguma aresta com pontas em A, podemos remover tal aresta sem diminuir o número de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos.

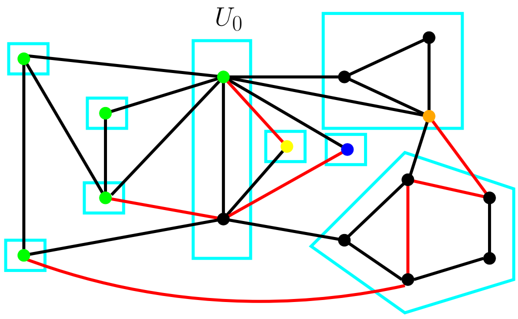

Figura 14: Um $\mathcal{S}$-transversal.

Provaremos por indução em $\alpha(\mathcal{S}) + \beta(\mathcal{S})$ que para toda coleção máxima $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos vale que $|\mathcal{R}| = \mu$.

Tome por base da indução os seguintes casos.

$$\alpha(\mathcal{S}) = 0 \Longrightarrow \mathcal{S} = \{\{v\} \ : \ v \in T\} \tag{1}$$
$$\beta(\mathcal{S}) = 0 \Longrightarrow V = T \tag{2}$$

No caso (1) temos que todo $\mathcal{S}$-caminho é um T-caminho. Logo, pelo teorema 16, basta tomar um $\mathcal{S}$-transversal onde U_0 é um Gallai-set e $U_1, \ldots, U_k$ são componentes de $G - U_0$ para verificar que $|\mathcal{R}| = \mu$.

No caso (2), arestas são $\mathcal{S}$-caminhos, então um emparelhamento máximo é uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Logo, de forma análoga ao caso anterior, o teorema 11 garante que $|\mathcal{R}| = \mu$.

Então podemos supor que $|\mathcal{S}| \geq 2$, caso contrário não existiriam $\mathcal{S}$-caminhos, e existe $A \in \mathcal{S}$ com $|A| \geq 2$, senão caímos no caso (1).

Sejam $a \in A$ e $\mathcal{A} := \{(\mathcal{S} \setminus \{A\}) \cup \{A \setminus \{a\}, \{a\}\}\}$.

Todo $\mathcal{S}$-caminho é um $\mathcal{A}$-caminho, então todo $\mathcal{A}$-transversal é um $\mathcal{S}$-transversal. Dessa forma $\min_{\mathcal{U}_\mathcal{A}} c_T(\mathcal{U}_\mathcal{A}) \geq \mu$, onde $\mathcal{U}_\mathcal{A}$ é um $\mathcal{A}$-transversal.

Considere uma coleção máxima de $\mathcal{A}$-caminhos disjuntos $\mathcal{P}$ e um $\mathcal{A}$-transversal $\mathcal{U}_\mathcal{A}$. Note que $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{P}| \leq |\mathcal{R}| + 1$, pois os únicos $\mathcal{A}$-caminhos que não são $\mathcal{S}$-caminhos são caminhos P_a com uma ponta em a e outra em $A \setminus \{a\}$.

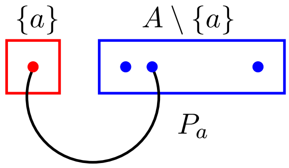

Figura 15: P_a é um $\mathcal{A}$-caminho, mas não é um $\mathcal{S}$-caminho.

Além disso, $\alpha(\mathcal{A}) < \alpha(\mathcal{S})$ e $\beta(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{S})$ e por hipótese de indução temos que $|\mathcal{P}| = \min_{\mathcal{U}_\mathcal{A}} c_T(\mathcal{U}_\mathcal{A})$.

Se $|\mathcal{P}| > \mu$ então $|\mathcal{P}| = |\mathcal{R}| + 1$ e existe um caminho P_a em $\mathcal{P}$. Logo, $\mathcal{P} \setminus \{P_a\}$ é uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos e, assim, $|\mathcal{R}| = \mu$.

Então vamos supor que $|\mathcal{P}| = \mu$ e existe um caminho P_a em $\mathcal{P}$, caos contrário $\mathcal{R} = \mathcal{P}$ seria uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos. Como A é estável, existe $b \in V \setminus T$ tal que $b \in P_a$.

Agora, considere $\mathcal{B} := \{(\mathcal{S} \setminus \{A\}) \cup \{A \cup \{b\}\}\}$. Então $T \cup \{b\}$ é o novo conjunto de terminais. Sejam $\mathcal{Q}$ uma coleção de $\mathcal{B}$-caminhos disjuntos e $\mathcal{U}_\mathcal{B}$ um $\mathcal{B}$-transversal.

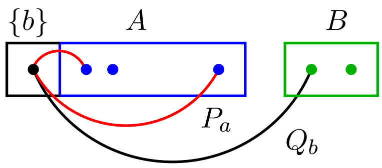

Figura 16: Q_b é um $\mathcal{B}$-caminho, mas não é um $\mathcal{S}$-caminho.

Então $\alpha(\mathcal{B}) + \beta(\mathcal{B}) < \alpha(\mathcal{S}) + \beta(\mathcal{S})$, pois $\alpha(\mathcal{B}) = \alpha(\mathcal{S}) + |A|$ e $\beta(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{S}) - (|T| + |(V \setminus T) \setminus \{b\}|)$, mas $|T| + |(V \setminus T) \setminus \{b\}| > |A|$ já que $|\mathcal{S}| \geq 2$. Logo por hipótese de indução temos que $|\mathcal{Q}| = \min_{\mathcal{U}_\mathcal{B}} c_{T+b}(\mathcal{U}_\mathcal{B}) \geq \min_{\mathcal{U}_\mathcal{B}} c_T(\mathcal{U}_\mathcal{B})$.

Além disso, todo $\mathcal{S}$-caminho é um $\mathcal{B}$-caminho, então todo $\mathcal{B}$-transversal é um $\mathcal{S}$-transversal. Dessa forma $\min_{\mathcal{U}_\mathcal{B}} c_T(\mathcal{U}_\mathcal{B}) \geq \mu$.

Note que $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{Q}| + 1$, pois os únicos $\mathcal{B}$-caminhos que não são $\mathcal{S}$-caminhos são caminhos Q_b com uma ponta em b.

Se $|\mathcal{Q}| > \mu$ então $|\mathcal{Q}| = \mu + 1$ e existe um caminhos Q_b com uma ponta em b. Logo, $\mathcal{Q} \setminus \{Q_b\}$ é uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos e $|\mathcal{R}| = \mu$.

Então podemos supor que $|\mathcal{Q}| = \mu$ e existe Q_b. Escolha $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$ de forma que $E(\mathcal{Q}) \setminus E(\mathcal{P})$ seja minimal.

Como $|\mathcal{P}| = |\mathcal{Q}|$ e b não é ponta de nenhum caminho em $\mathcal{P}$, então existe um vértice p que é ponta de algum caminho em $\mathcal{P}$ mas não é ponta de nenhum caminho em $\mathcal{Q}$.

Sejam $P \in \mathcal{P}$ um caminho com pontas p e q e Q um caminho qualquer em $\mathcal{Q}$ com pontas y e z.

Se P não possui nenhum vértices em comum com qualquer caminho em $\mathcal{Q}$, então $p \neq a$ e $q \neq a$, pois $b \in P_a$ e $b \in Q_b$. Logo P é um $\mathcal{S}$-caminho e $(\mathcal{Q} \setminus \{Q_b\}) \cup \{P\}$ é uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos, ou seja, $|\mathcal{R}| = \mu$.

Agora, considere que P e Q possuem um vértice w em comum. Então temos dois casos para tratar, o caso em que y ou z também estão em P e o caso em que nenhum dos dois está em P.

Se $y \notin P$ e $z \notin P$, considere $U \in \mathcal{B}$ tal que $p \in U$ (figura 17). Como Q é um $\mathcal{B}$-caminho, então podemos supor que $y \notin U$, caso contrário basta considerar z ao invés de y.

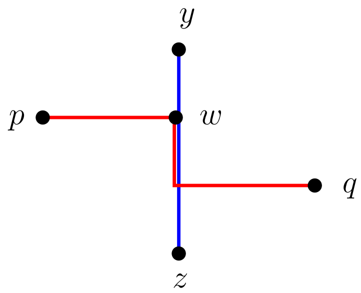

Figura 17: Caso em que $y \notin P$ e $z \notin P$.

Logo $\langle p, \ldots, w, \ldots, y\rangle$ é um $\mathcal{B}$-caminho que contradiz a minimalidade de $E(\mathcal{Q}) \setminus E(\mathcal{P})$. Portanto este caso não é possível.

Então podemos supor que $z \in P$ (figura 18). Se $U \in \mathcal{B}$ tal que $p \in U$, então $z \in U$, caso contrário $\langle p, \ldots, w, \ldots, z\rangle$ seria um $\mathcal{B}$-caminho que contradiz a minimalidade de $E(\mathcal{Q}) \setminus E(\mathcal{P})$. Mas então $U = A \cup \{b\}$ e dessa forma $P = P_a$ e $z = b$.

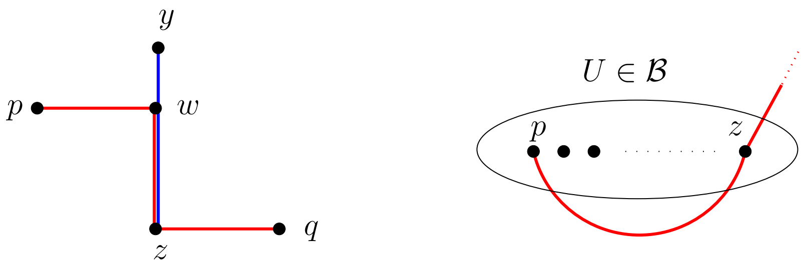

Figura 18: Caso em que $z \in P$.

Logo $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q} \setminus \{Q_b\}) \cup \{\langle p, \ldots, w, \ldots, y\rangle\}$ é uma coleção de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos e tem cardinalidade μ. Portanto $|\mathcal{R}| = \mu$. $\square$

6.3 Algoritmos

Algoritmos eficientes para os problemas do emparelhamento máximo e empacotamento de RS-caminhos e de T-caminhos já eram conhecidos. Mas apenas recentemente começaram a surgir um algoritmos eficientes para o problema de empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos.

Até poucos anos atrás, o único algoritmo eficiente conhecido para encontrar uma coleção máxima de $\mathcal{S}$-caminhos disjuntos havia sido obtido por Lovász através de uma redução ao *linear matroid matching* [6].

Em 2004, Sebő e Szegő [10] deram os primeiros passos para a criação de um algoritmo baseado na estrutura da fórmula de Mader, análoga à estrutura de Gallai-

Edmonds para emparelhamentos máximos, e nas idéias apresentadas por Lovász e Plummer no algoritmo 3.6.

No mesmo ano Chudnovsky, Geelen, Gerards, Goddyn, Lohman e Seymour [3] apresentaram uma fórmula min-max que generalizou a de Mader. Logo em seguida Chudnovsky, Cunningham e Geelen [2], baseando-se na estrutura dessa nova fórmula, obtiveram um algoritmo que também usa as idéias de Lovász e Plummer.

7 Tarefas realizadas

Inicialmente estudei emparelhamentos, principalmente através do livro do Lovász e Plummer [7], mas eventualmente consultando outros livros também ([4, 1]). Emparelhamentos foi o tópico que teve maior ênfase por ser mais conhecido e possuir muitos resultados já demonstrados.

Emparelhamentos foi o primeiro tópico estudado, pois, para estudar o teorema de Mader sobre $\mathcal{S}$-caminhos, seria mais fácil começar por alguns casos particulares dele, como o teorema de Tutte-Berge para emparelhamento, de Menger para RS-caminhos e de Gallai para T-caminhos.

Comecei estudando emparelhamento em grafos bipartidos, que é mais fácil do que em grafos arbitrários e possui resultados mais fortes. Os principais resultados estudado foram os teoremas de Kőnig, de Hall e de Frobenius.

Achei a demonstração do teorema de Kőnig no livro do Lovász complicada e só a entendi com a ajuda do meu orientador, então procurei por outras demonstrações em outros livros. Encontrei no livro do Diestel uma demonstração que achei mais fácil de entender.

Em seguida estudei um algoritmo para encontrar emparelhamentos máximos em grafos bipartidos, conhecido como método húngaro. Também estudei alguns conceitos relacionados à emparelhamentos em grafos bipartido, tais como deficiência e excesso.

Mesmo no inicio do livro do Lovász e Plummer encontrei alguns tópicos mais avançados como funções submodulares e matróides. Tive dificuldades para entendê-los e após uma conversa com meu orientador decidimos pular esta parte agora e retomá-la mais tarde quando for necessário. Então passei a estudar o sistema de representantes distintos, que apesar se ser um problema de teoria dos conjuntos é facilmente traduzido para a linguagem de grafos e foi com ele que Hall originalmente enunciou seu teorema.

Depois estudei resultados clássicos relacionados a emparelhamentos máximos e perfeitos, tais como o teorema de Tutte, o lema de Gallai e a fórmula de Tutte-Berge. Outro tópico estudado, e de certa importância para a iniciação científica, foi o teorema de estrutura de Gallai-Edmonds. Estudei esta estrutura por bastante tempo, pois ela tem muitas propriedades interessantes e que não são fáceis de deduzir. Também vi um pouco sobre barreiras, que são conjuntos de vértices que geram o máximo na fórmula de Tutte-Berge.

No início do segundo semestre, eu comecei a estudar emparelhamentos no contexto de programação linear, mas como ainda faltava ver muita coisa meu orientador resolveu que era melhor começar a estudar os outros tópicos.

Então passei a consultar o livro do Schrijver [9] e algumas notas feitas pelo meu orientador para estudar os problemas do empacotamento de RS-caminhos, T-caminhos e $\mathcal{S}$-caminhos em grafos. Para o problema do empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos em grafos também consultei um artigo de Schrijver [8], onde é dada uma demonstração razoavelmente simples do teorema de Mader.

Por fim estudei o algoritmo de Edmonds [5] para encontrar emparelhamento máximo em grafos arbitrários e um artigo de Sebő e Szegő [10] no qual são dados os primeiros passos para a criação de um algoritmo combinatório eficiente para o problema do empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos.

Parte subjetiva

8 Experiência pessoal

Aqui relatarei algumas das experiências que adquiri com a iniciação científica e com o Bacharelado em Ciência da Computação (BCC).

8.1 Desafios e frustrações

Para mim o primeiro desafio encontrado foi o de escolher o tema do projeto de iniciação. A única coisa que eu tinha decidido é que seria alguma coisa na área de combinatória ou otimização combinatória. Apesar de ter conversado com alguns professores e colegas, dentre os quais alguns já haviam se formado, ainda não tinha me decidido.

Mesmo depois de ter escolhido o professor Coelho como orientador, eu ainda não tinha certeza sobre o projeto. Até que certo dia um colega[1] me sugeriu estudar empacotamento de $\mathcal{S}$-caminhos. Segundo ele, era um assunto bem interessante, que havia sido apresentado em um seminário dado pelo Coelho. Como já estávamos quase em abril decidi que seria isso mesmo e acabei gostando do projeto.

No decorrer da iniciação científica, comecei a escrever sobre os assuntos que já tinha estudado. Assim, eu não teria que escrever a monografia inteira de uma só vez. Foi então que percebi que escrever textos científicos não é tão simples e tive muita dificuldade no início. Atualmente, após várias dicas do Coelho, tenho menos dificuldade, mas ainda não é uma coisa fácil para mim.

Além de melhorar o meu jeito de escrever, a iniciação científica também me ajudou na leitura e no entendimento de artigos científicos. Eu não havia lido nenhum artigo antes da iniciação. A forma em que artigos são escritos é muito diferente da forma em que livros são escritos. No começo tive muita dificuldade e não entendia muita coisa dos artigos que eu lia. Mas, à medida que eu os lia, a minha compreensão foi gradualmente aumentando.

Dentre as tarefas do trabalho de formatura, a que me deu mais trabalho foi o pôster. Como minha iniciação científica é mais teórica do que prática, é mais difícil fazer um pôster que atraia a atenção das pessoas.

Uma das coisas das quais eu mais me arrependo é de não ter planejado direito quantas disciplinas fazer por semestre, pois acabei sobrecarregando o primeiro semestre do último ano. Isso limitou a minha dedicação para o projeto, devido à quantidade de aulas e trabalhos.

[1] Marcel K. de Carli Silva

No primeiro semestre do último ano, acabei fazendo cinco disciplinas da graduação e mais uma da pós-graduação como aluno especial (MAC5770 - Introdução à Teoria dos Grafos). Não me arrependo de ter feito a disciplina da pós-graduação, pois ela me ajudou bastante e aprendi muito.

No semestre seguinte, eu esperava ficar mais livre, pois só precisava fazer mais uma disciplina da graduação. Mas acabei decidindo fazer mais duas disciplinas da pós-graduação, pois as achei muito interessantes.

Dessa forma, a falta de tempo foi o maior problema que enfrentei durante a iniciação científica, sendo que tive que deixar de estudar alguns assuntos que eu queria ter visto, como matróides.

Outra coisa da qual me arrependo foi o de não ter implementado nenhum dos algoritmos estudados devido à falta de tempo. Gostaria de ter implementado, pelo menos o algoritmo de Edmonds para encontrar emparelhamentos máximos. Então decidi aprofundar os estudos ao invés de implementar os algoritmos.

Uma das minhas maiores frustrações foi a de não ter feito uma iniciação científica anteriormente. Um dos motivos de ter agido assim, foi a minha indecisão quanto ao assunto da iniciação. Considero que isso foi um erro, pois o melhor jeito de descobrirmos se gostamos ou não de um determinado assunto é começar a estudá-lo. Se eu tivesse começado a iniciação antes, eu poderia ter estudado mais tópicos e até mesmo implementado alguns algoritmos.

8.2 Disciplinas mais relevantes para o projeto

Entre as disciplinas do BCC mais relevantes para a minha iniciação científica, considero que as seguintes são as principais.

- MAC122 - Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos

  Na minha opinião esta é uma das disciplinas mais importantes para o BCC, independentemente da área que o aluno pretende seguir. É nesta disciplina que temos o primeiro contato com algoritmos e estruturas de dados e que começamos a nos preocupar com a eficiência dos algoritmos.

- MAC338 - Análise de Algoritmos

  Esta disciplina foi muito importante para o estudo de algoritmos. O tempo que um algoritmo consome é um aspecto crítico para aplicações, portanto saber analisar a eficiência de um algoritmo pode ser essencial.

- MAC328 - Algoritmos em Grafos

  Todos os problemas que estudei foram sobre grafos, logo é fácil entender a importância desta disciplina para minha iniciação científica. Algoritmos básicos como os de busca em largura e busca em profundidade são base para muitos algoritmos mais sofisticados, como o de encontrar emparelhamentos máximos. Portanto, é muito importante entendê-los bem.

- MAC325 - Otimização Combinatória

  Nesta disciplina, aprendi técnicas para resolver problemas de otimização combinatória utilizando fluxos em redes. Dentre os problemas que estudei, alguns podem ser resolvidos eficientemente com fluxos em redes, como emparelhamento em grafos bipartidos e empacotamento de RS-caminhos. Fluxos em redes é uma ferramenta importante em otimização combinatória. Considero que ter cursado essa disciplina me ajudou a decidir a área da minha iniciação científica.

- MAC315 - Programação Linear

  Os problemas que estudei, assim como muitos problemas de otimização combinatória, podem ser modelados como problemas de programação linear. Técnicas de programação linear têm se tornado muito importantes para resolver problemas de otimização de combinatória. Sem dúvida é imprescindível, para quem quer seguir a área, conhecer programação linear e suas técnicas.

Também considero que as disciplinas MAT111 - Cálculo Diferencial e Integral I e MAT139 - Álgebra Linear para Computação foram fundamentais, pois sem elas eu não teria a base matemática necessária para seguir com meus estudos.

Outra disciplina, que não tem uma relação direta com minha iniciação científica, mas me estimulou bastante a seguir na área de otimização combinatória foi MAC327 - Desafios de Programação. Nesta disciplina resolvemos diversos problemas de competições semelhantes à Maratona de Programação. Muitos desses problemas eram de otimização combinatória e, além de serem divertidos de se resolver, pude treinar minha habilidade de reconhecer o tipo de problema e implementar sua solução.

8.3 Interação com o orientador

Considero que a interação com meu orientador foi uma parte muito importante para mim, não só em relação à minha iniciação científica, mas para a minha formação de forma geral.

Tínhamos reuniões semanais, o que evitou que eu ficasse um período muito longo sem trabalhar na minha iniciação científica. Mesmo quando eu não tinha tempo de estudar nada na semana, o Coelho me explicava várias coisas durante a reunião. Isso me ajudava muito na hora de retomar os estudos.

Nas reuniões, eu apresentava o que eu tinha estudado. O Coelho esclarecia minhas dúvidas e indicava o que eu deveria estudar em seguida. Quando eu não entendia a demonstração de algum teorema, ficávamos tentando deduzi-lo ao invés de olhar direto em algum livro.

Nossas conversas não eram apenas voltadas aos estudos da iniciação científica. Muitas vezes eu falava sobre como eu estava indo nas outras disciplinas do curso e também sobre assuntos não acadêmicos.

O Coelho me deu várias dicas e conselhos de como agüentar firme e não entrar em desespero por causa da quantidade de disciplinas que eu estava cursando, sendo compreensível nos momentos em que não tive tempo de estudar o planejado.

8.4 Considerações finais

Eu gostei muito da minha iniciação científica e aprendi muito com ela. Apesar de ela não ter progredido conforme o plano inicial, devido a problemas já mencionados, acredito que aproveitei bem a iniciação e que estou preparado para uma pós-graduação na área.

As duas coisas que considero mais valiosas na iniciação científica foram a interação com meu orientador e a experiência de ler artigos científicos. Acredito que os conselhos dados pelo Coelho foram e serão muito importantes para minha vida profissional.

De forma geral gostei muito das experiências que passei durante o BCC. Para mim, o curso foi muito bom, tanto para minha vida pessoal quanto profissional. As amizades que adquiri ao longo desses quatro anos foram muito importantes para mim. Sem elas, eu certamente não teria agüentado o curso inteiro. Não posso deixar de mencionar as aulas ministradas por alguns ótimos professores, que não só me ensinaram muito, mas também me incentivaram a seguir com o curso.

Gostaria de finalizar agradecendo meus amigos e professores, em especial meu orientador, por toda a ajuda que me deram nesses quatro anos.

Referências

[1] J.A. Bondy e U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.

[2] M. Chudnovsky, W.H. Cunningham e J. Geelen, *An algorithm for packing non-zero A-paths in group-labeled graphs*, Preprint, September 2004.

[3] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman e P. Seymour, *Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs*, Preprint, October 2004.

[4] R. Diestel, *Graph theory*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 173, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[5] J. Edmonds, Paths, trees, and flowers, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 449–467.

[6] L. Lovász, Matroid matching and some applications, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **28** (1980), 208–236.

[7] L. Lovász e M.D. Plummer, *Matching theory*, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, North-Holland, Budapest, 1986.

[8] A. Schrijver, A short proof of Mader $\mathcal{S}$-paths theorem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **85** (2001), 319–321.

[9] ———, *Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency*, Algorithms and Combinatorics, vol. 24, Springer, 2003.

[10] A. Sebő e L. Szegő, The path-packing structure of graphs, *Proceedings of the 10th Integer Programming and Combinatorial Optimization* (Berlin) (D. Bienstock e G. Nemhauser, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 3064, 2004, pp. 256–270.