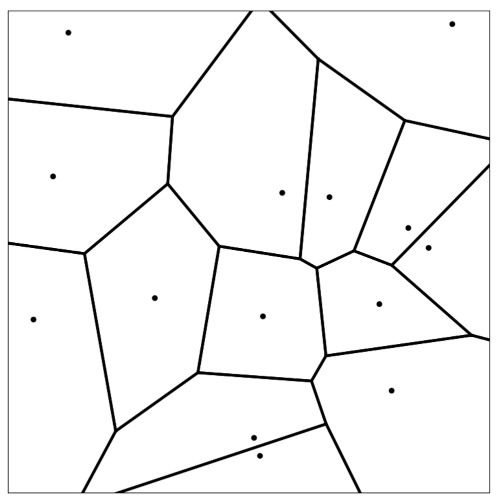
Algoritmos de Otimização para Construção de Tesselações Centroidais de Voronoi

Arthur Gabriel de Santana, Orientador: Ernesto G. Birgin
Trabalho de Formatura Supervisionado
IME-USP

Introdução

Dado um conjunto de *pontos geradores* $Z \in \mathbb{R}^n$, definimos, para cada ponto z_i, sua *região de Voronoi* $V_i(Z)$, dada pelos pontos mais próximos de z_i que de qualquer outro ponto gerador. Chamamos de *Diagrama de Voronoi* o conjunto $V(Z)$ das regiões de Voronoi.

Um Diagrama de Voronoi com 14 pontos geradores.

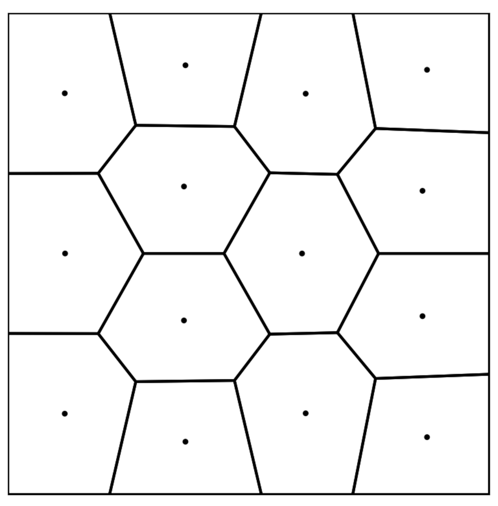


Dada uma função densidade ρ, os centros de massa de cada região são dados por

$$C_i(Z) = \frac{\int_{V_i(Z)} x\rho(x)\ \mathrm{d}x}{\int_{V_i(Z)} \rho(x)\ \mathrm{d}x}.$$

Quando $z_i = C_i(Z), \forall i$, dizemos que $V(Z)$ é uma *Tesselação Centroidal de Voronoi (TCV)*.

Uma TCV com 14 pontos geradores.



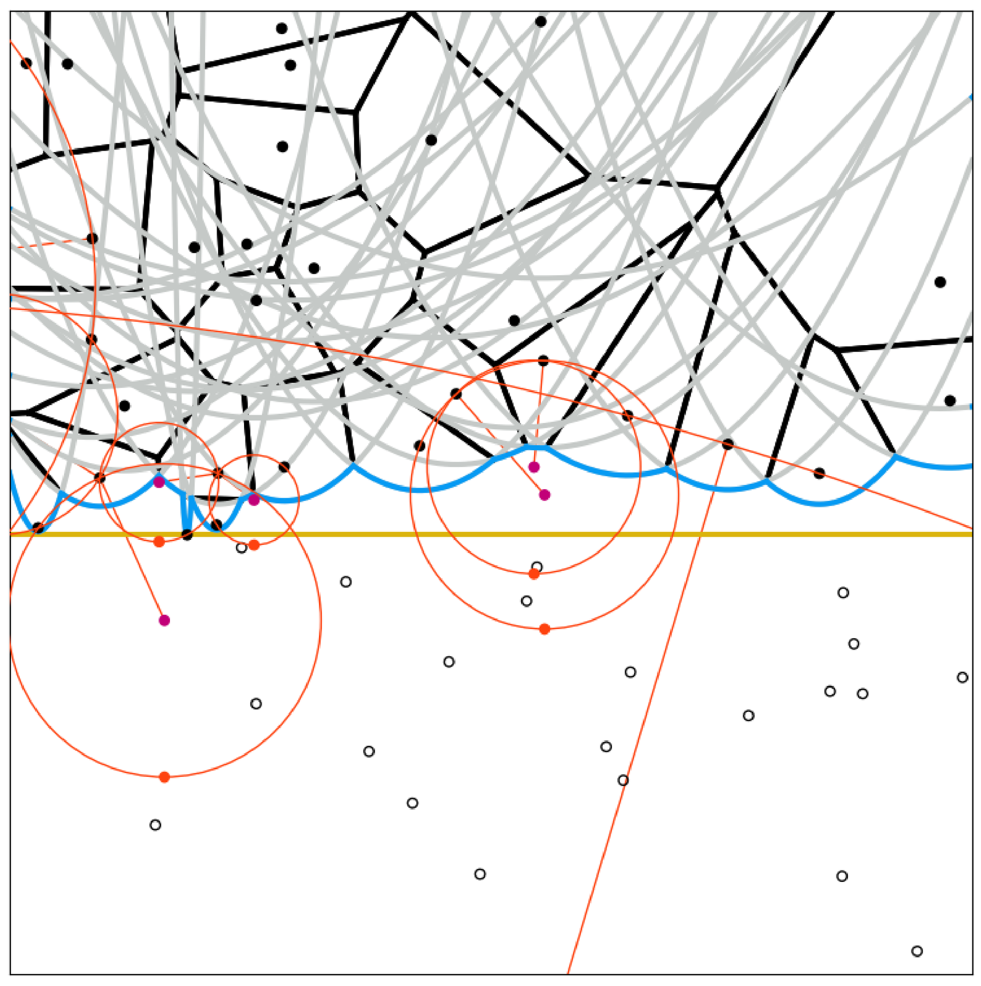
TCVs encontram aplicações em diversas áreas, como quantização, pesquisa operacional, integração numérica [2] e geração de malhas para modelos atmosféricos [4].

Algoritmo de Fortune

O algoritmo de Fortune é um algoritmo para o cálculo de Diagramas de Voronoi no plano, com complexidade $\mathcal{O}(m \log m)$, onde m é o número de pontos geradores [1].
Seu funcionamento é baseado em uma estrutura chamada *linha da praia*: os pontos mais baixos da união das parábolas definidas pelos pontos geradores e uma *linha de varredura*, que atravessa o plano fazendo paradas em cada um dos pontos de interesse.
À medida que a linha de varredura se movimenta, as intersecções entre as parábolas desenham as arestas do diagrama. Quando uma parábola é absorvida por outras e desaparece da linha da praia, é determinado um vértice do diagrama.

(continuação)

Uma iteração do algoritmo de Fortune. A linha da praia está em azul. A linha de varredura em amarelo. Os centros dos círculos em vermelho determinam pontos de absorção de parábolas.

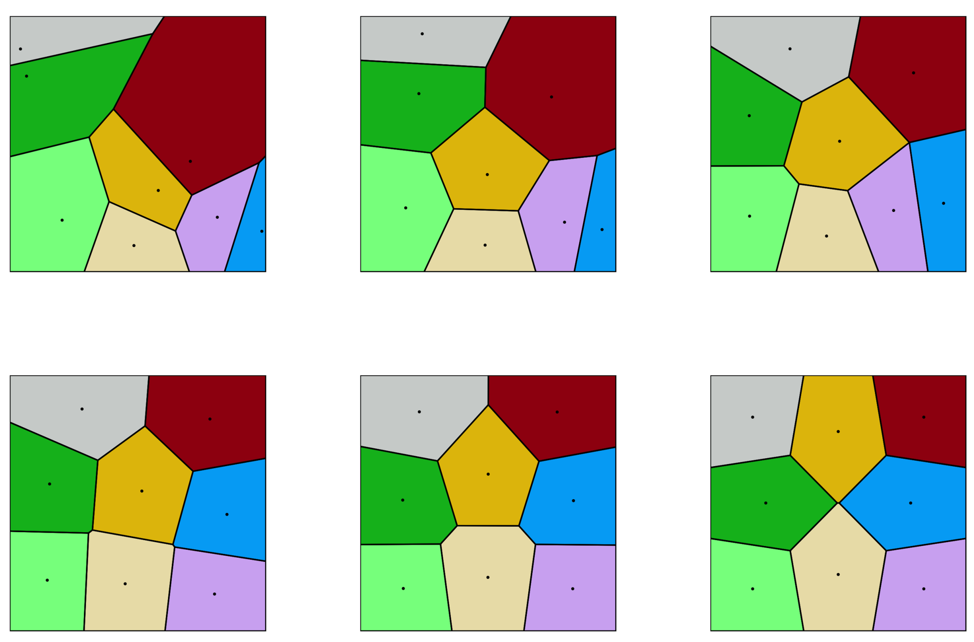


Construção de TCVs

O algoritmo de Lloyd é um método iterativo para a construção de TCVs [2], baseado na transformação

$$T(Z) = \{C(Z)\}_{i=1}^{m}.$$

Algumas iterações do algoritmo de Lloyd com 8 pontos geradores.

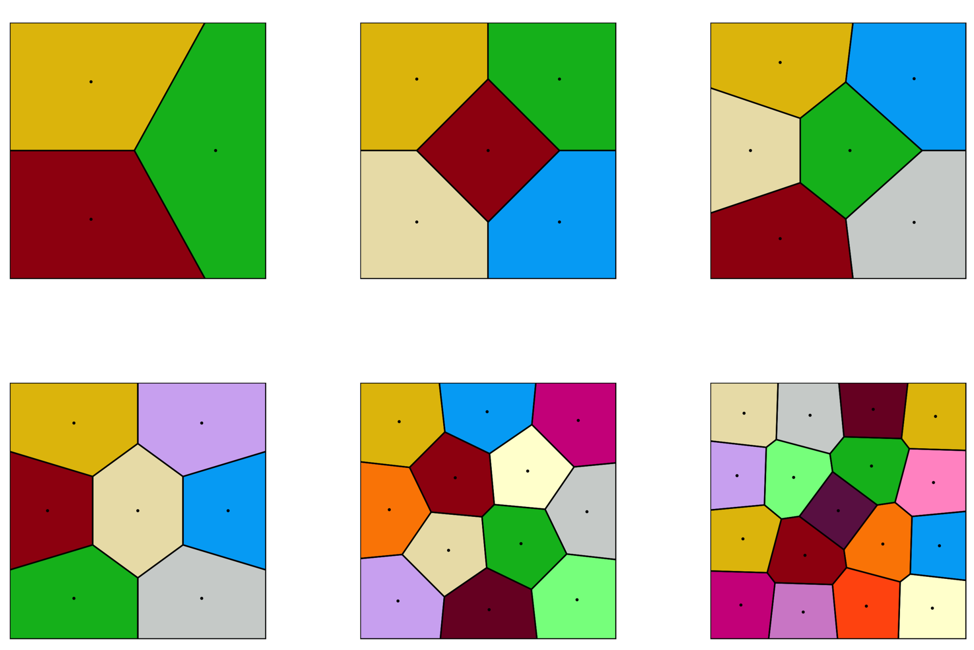


Pontos fixos de T são TCVs. Além disso, são pontos estacionários da função

$$\mathcal{G}(Z) = \sum_{i=1}^{m} \int_{V_i(Z)} \|x - z_i\|^2\ \rho(x)\ \mathrm{d}x\ ,$$

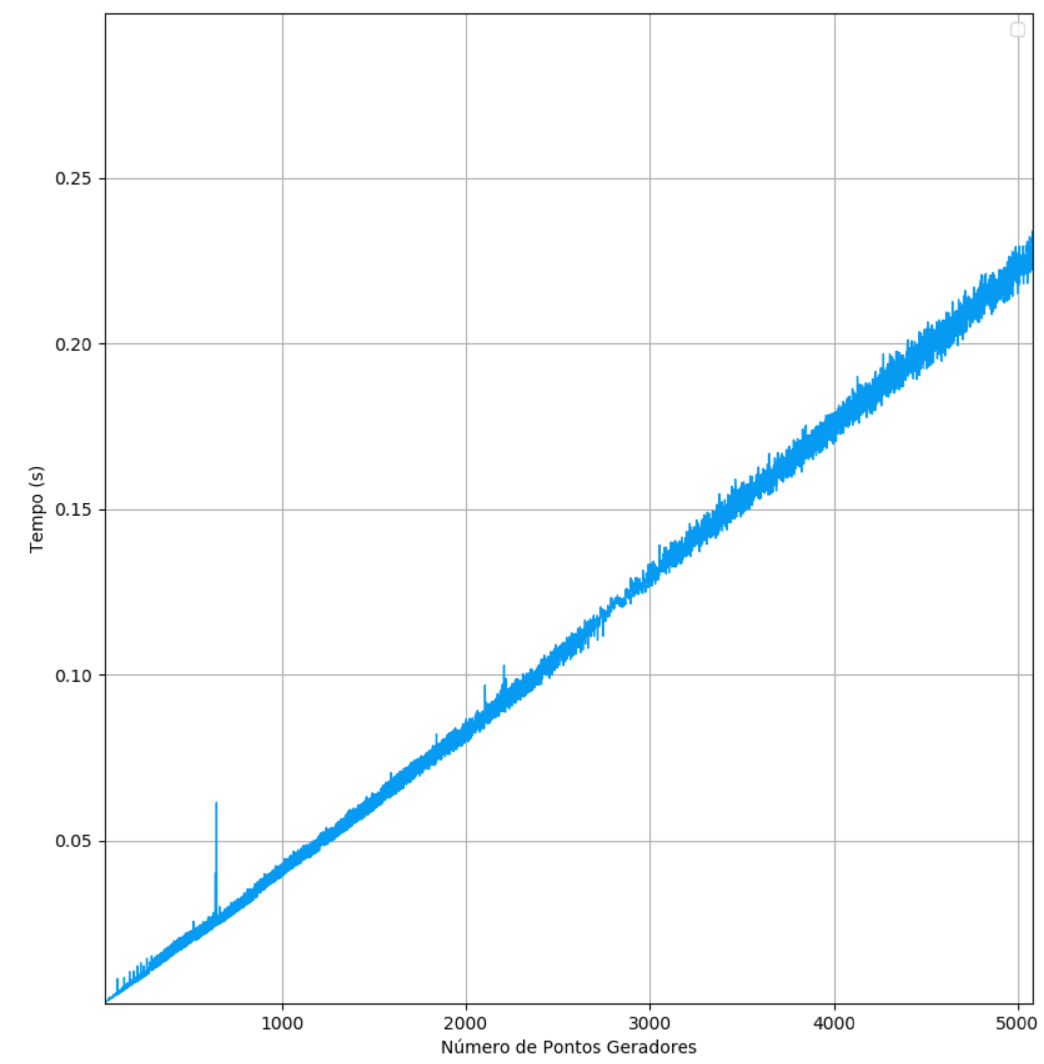
o que permite a utilização de métodos clássicos de otimização, como o método de descida do gradiente [3], para o cálculo de TCVs.

Algumas TCVs construídas com o método do gradiente.

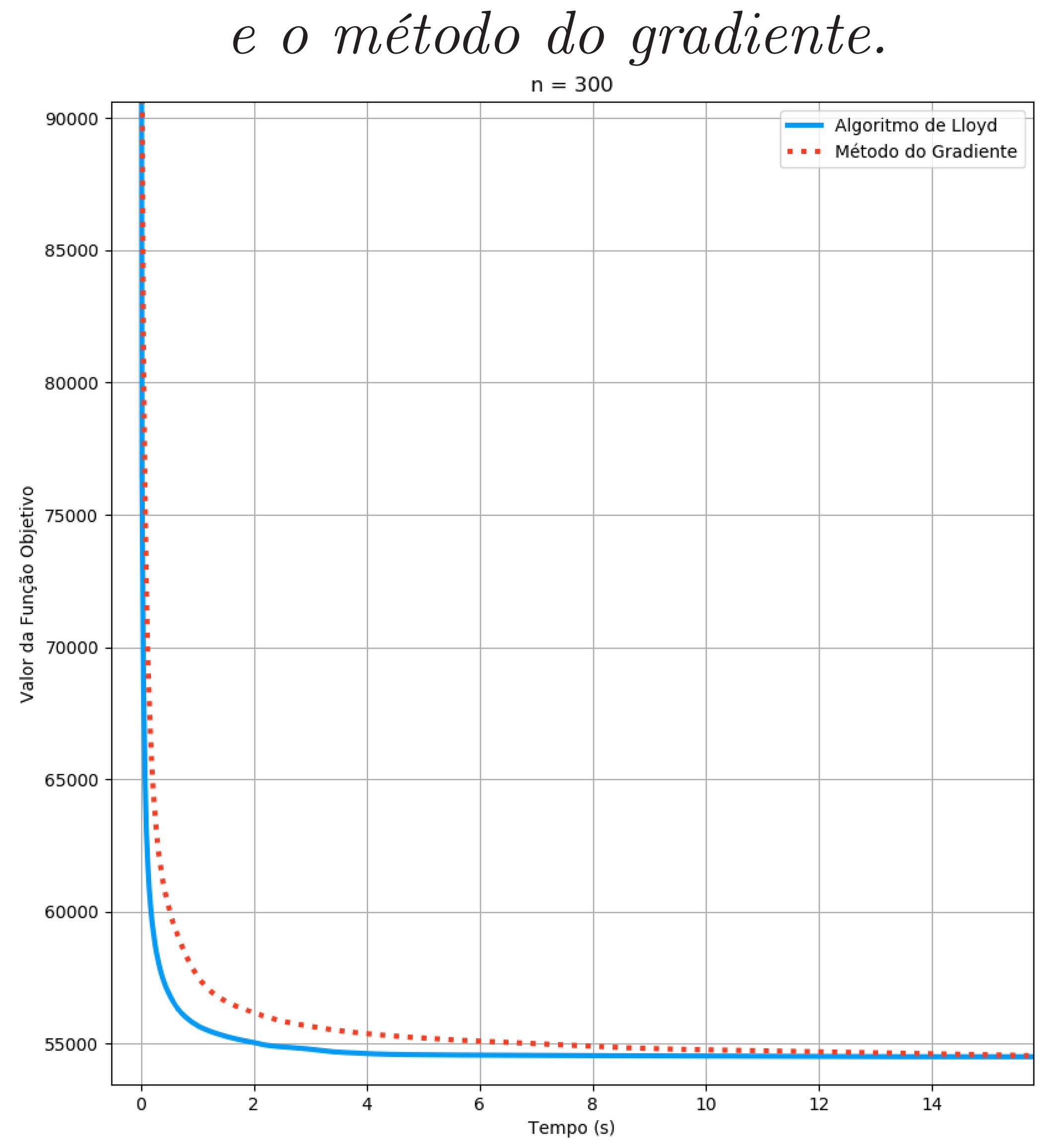


Resultados

Tempo de execução do algoritmo de Fortune.



Comparação entre o algoritmo de Lloyd e o método do gradiente.



Próximos Passos

Formulando a construção de TCVs como um problema de otimização, podemos alterar a função objetivo $\mathcal{G}$ para levar em consideração critérios de qualidade adicionais para os diagramas.
Pretendemos testar extensões desse tipo com critérios desenvolvidos para geração de malhas para resolução de equações diferenciais em modelos atmosféricos [4].

Referências

[1] BERG, M. et al. Computational Geometry, 2008.
[2] DU, Q.; FABER, V.; GUNZBURGER, M. Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms, 1999.
[3] FRIEDLANDER, A. Elementos de Programação Não-Linear, 1994.
[4] MIURA, H.; KIMOTO, M. A Comparison of Grid Quality of Optimized Spherical Hexagonal–Pentagonal Geodesic Grids, 2005.