Partições Conexas Balanceadas de Grafos

Arthur Correia Gomes

IME-USP

12 de janeiro de 2022

Supervisora: Yoshiko Wakabayashi

Índice

Definição do BCP$_q$ (q inteiro, $q \geq 2$)

Definição (BCP$_q$)

- **Entrada:** Um grafo conexo $G = (V, E)$ e uma função peso $w : V \to \mathbb{Z}_+$
- **Saída:** Uma q-partição conexa $\{V_1, V_2, \ldots, V_q\}$ de G
- **Objetivo:** Pesos das classes mais balanceados (similares) possíveis

- $\{V_1, V_2, \ldots, V_q\}$ é uma q-**partição conexa** se $G[V_i]$, $1 \leq i \leq q$, é conexo
- $w(V_i) = \sum_{v \in V_i} w(v)$ peso da classe V_i

Definição do BCP$_q$ (q inteiro, $q \geq 2$)

Definição (BCP$_q$)

- **Entrada:** Um grafo conexo $G = (V, E)$ e uma função peso $w : V \to \mathbb{Z}_+$
- **Saída:** Uma q-partição conexa $\{V_1, V_2, \ldots, V_q\}$ de G
- **Objetivo:** Pesos das classes mais balanceados (similares) possíveis

Definição (MaxMin BCP$_q$)

- **Objetivo:** maximizar $\min_{i \in [q]}\{w(V_i)\}$

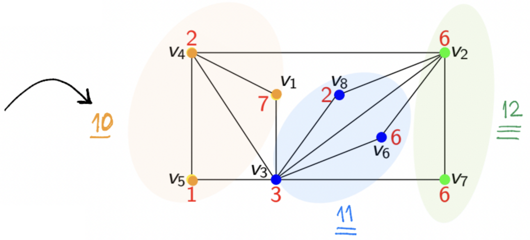
Definição (MinMax BCP$_q$)

- **Objetivo:** minimizar $\max_{i \in [q]}\{w(V_i)\}$

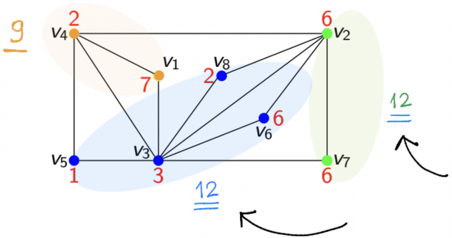
Equivalentes para $q = 2$, mas podem diferir para $q > 2$.

MaxMin e MinMax

- MaxMin BCP$_3$



- MinMax BCP$_3$



Foco do Trabalho: Algoritmos de Aproximação e Inaproximabilidade

- Algoritmo **A**

Definição (α-aproximação)

Se o problema é de **minimização** e para toda instância I

$$\mathrm{val}(A(I)) \leq \alpha \cdot \mathrm{OPT}(I),$$

dizemos que A é uma α-**aproximação** para o problema. Caso o problema seja de **maximização** e para toda instância I

$$\mathrm{val}(A(I)) \geq \frac{1}{\alpha} \cdot \mathrm{OPT}(I),$$

então A também é uma α-**aproximação**.

Complexidade Computacional e Inaproximabilidade

- MaxMin BCP$_q$
  - NP-difícil em grafos bipartidos para $q \geq 2$ [Dyer e Frieze 1985]
  - NP-difícil em grafos q-conexos para $q \geq 2$ [Chataigner *et al.* 2007]
  - NP-difícil aproximar com erro absoluto $\leq |V|^{1-\epsilon} \quad \forall \epsilon > 0$ [Chlebíková 1996]
  - Não admite $\frac{6}{5}$-aproximação quando q é parte da entrada [Chataigner *et al.* 2007]
- MinMax BCP$_q$
  - NP-difícil em grafos bipartidos para $q \geq 2$ [Dyer e Frieze 1985]
  - NP-difícil em grafos 2-conexos para $q \geq 2$ [Chataigner *et al.* 2007]

Algoritmos Exatos Polinomiais

Tipo de grafo	Problema
Árvores	MinMax BCP_q e MaxMin BCP_q
Escadas	MaxMin BCP_q
Grafo com 1 ou 2 vértices-de-corte	MaxMin BCP_2
Grafo 2-conexo	1-BCP_2
Grafo 3-conexo	1-BCP_3
Grafo planar 4-conexo	1-BCP_4

Tabela: Casos em que foram obtidos algoritmos polinomiais combinatórios

Algoritmos de Aproximação

- MaxMin BCP$_q$
  - $\frac{4}{3}$-aproximação para $q = 2$ [Chlebíková 1996]
  - $\frac{5}{3}$-aproximação para $q = 3$ [G. Chen *et al.* 2020]
  - Aproximação para classes especiais de grafos
- MinMax BCP$_q$
  - $\frac{5}{4}$-aproximação para $q = 2$ e $\frac{3}{2}$-aproximação para $q = 3$ [G. Chen *et al.* 2020]
  - $\frac{24}{13}$-aproximação para $q = 3$ em grafos com pesos unitários [Y. Chen *et al.* 2019]
  - $\frac{q}{2}$-aproximação em grafos com pesos unitários [Y. Chen *et al.* 2019]
  - $(\frac{q}{2} + \epsilon)$-aproximação em grafos com pesos arbitrários [Moura *et al.* 2021]

Algoritmos Baseados em Programação linear inteira (ou mista)

Existem resultados baseados em programação linear inteira (ou mista), mas tais abordagens não foram estudadas.

Uma $\frac{4}{3}$-aproximação para o MaxMin BCP_2

Definição (Operação PULL)

- **Entrada:** Bipartição $\{V_1, V_2\}$
- **Condições:**
  - $w(V_1) < \frac{3}{8}w(V)$
  - $w(u) < w(V) - 2w(V_1)$ para $u \in V_2$ tal que u é o vértice de menor peso adjacente a V_1
- **Saída:** $\{V_1 \cup \{u\}, V_2 \setminus \{u\}\}$

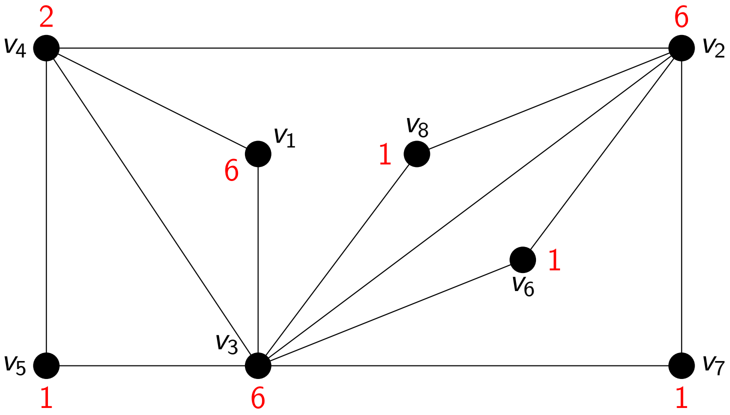
Uma $\frac{4}{3}$-aproximação para o MaxMin BCP$_2$

Algoritmo 1 APPROX-2

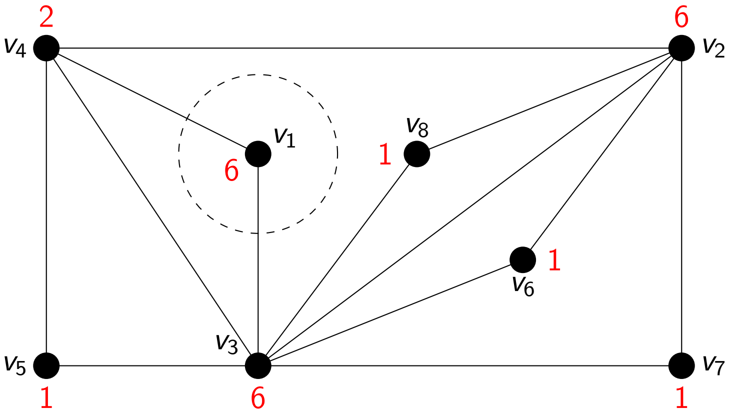
Entrada: Grafo 2-conexo $G = (V, E)$ e função peso $w : V \to \mathbb{Z}_+$
Saída: 2-partição conexa $\{V_1, V_2\}$ de V

Ordene os vértices de V de maneira que $w(v_1) \geq w(v_2) \geq \cdots \geq w(v_n)$
$\{V_1, V_2\} \leftarrow \{\{v_1\}, V \setminus \{v_1\}\}$
se $w(v_1) \geq \frac{1}{2} w(V)$ **então**
    devolva $\{V_1, V_2\}$
enquanto $w(V_1) < \frac{3}{8} w(V)$ **faça**
    se $\{V_1, V_2\}$ satisfaz as condições de PULL **então**
        $u \leftarrow \min\{w(v) | v \in V_2 \text{ e } \{V_1 \cup \{u\}, V_2 \setminus \{u\}\}\}$
        $\{V_1, V_2\} \leftarrow \text{PULL}(u, V_1)$
devolva $\{V_1, V_2\}$

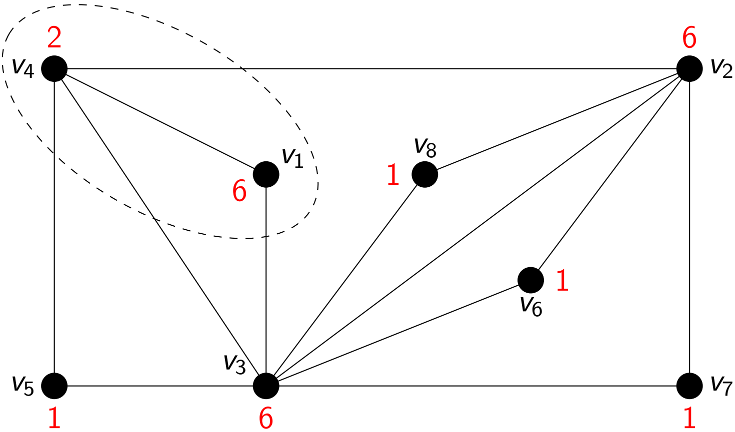
Exemplo Ilustrativo



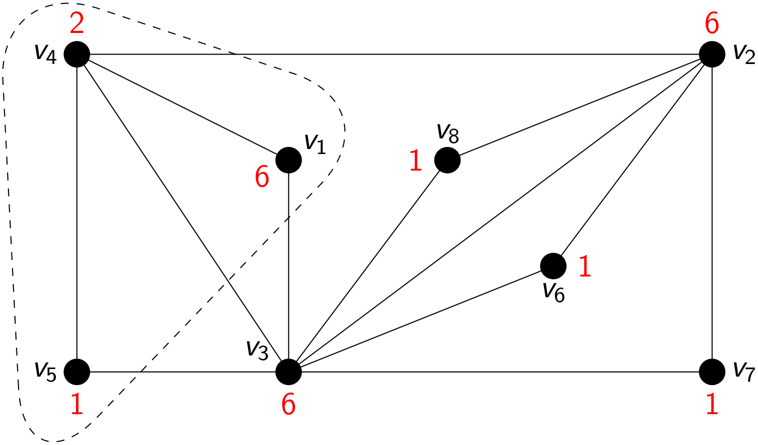
Exemplo Ilustrativo



Exemplo Ilustrativo



Exemplo Ilustrativo



Conclusão

- Estudo de tópicos de aproximação
  - Como são alguns algoritmos
  - Como é feita a análise
  - Como se prova resultados de inaproximabilidade
- O tópico estudado permitiu ter uma boa ideia desses tipos de resultados

Referências I

[Chataigner *et al.* 2007] Frédéric Chataigner, Liliane R. B. Salgado e Yoshiko Wakabayashi. "Approximation and inapproximability results on balanced connected partitions of graphs". Em: *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science* 9.1 (2007).

[G. Chen *et al.* 2020] Guangting Chen *et al.* "Approximation algorithms for the maximally balanced connected graph tripartition problem". Em: *J. Comb. Optim.* (2020), pp. 1–21. doi: 10.1007/s10878-020-00544-w.

[Y. Chen *et al.* 2019] Yong Chen, Zhi-Zhong Chen, Guohui Lin, Yao Xu e An Zhang. "Approximation algorithms for maximally balanced connected graph partition". Em: *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*. Springer. 2019, pp. 130–141.

Referências II

[Chlebíková 1996] Janka Chlebíková. "Approximating the maximally balanced connected partition problem in graphs". Em: *Information Processing Letters* 60.5 (1996), pp. 225–230.

[Dyer e Frieze 1985] M.E. Dyer e A.M. Frieze. "On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs". Em: *Discrete Applied Mathematics* 10.2 (1985), pp. 139–153.

[Moura *et al.* 2021] Phablo F. S. Moura, Matheus J. Ota e Yoshiko Wakabayashi. *Approximation and parameterized algorithms to find balanced connected partitions of graphs*. 2021. arXiv: `2108.10398 [cs.DS]`.