Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Emparelhamentos em Grafos

Explorando resultados clássicos em teoria dos grafos

Guilherme Mota Pereira

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof Dr Guilherme Oliveira Mota

São Paulo
2024

O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)

"Sometimes life is like this tunnel. You can't always see the light at the end of the tunnel, but if you keep moving, you will come to a better place." —Iroh. Avatar The Last Airbender. Episode 2.20: "The Crossroads of Destiny".

Agradecimentos

O desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso contou com a ajuda de diversas pessoas, dentre as quais agradeço:

Ao meu orientador, por todo o suporte acadêmico e motivacional, estando sempre à disposição para me auxiliar.

Aos professores do curso do Bacharelado em Ciência da Computação pelas aulas e ensinamentos. E a todos os professores de teoria da computação, os quais me fizeram apaixonar pela carreira acadêmica e - por isso - nos quais me inspiro dia após dia a fim de ser o melhor aluno, pesquisador e educador que eu puder ser.

Ao meu psicólogo, que durante todo o processo me ajudou a permanecer focado e trabalhar para chegar aos meus objetivos.

Aos meus amigos, que nunca saíram do meu lado e sempre me deram todo suporte, mesmo nos momentos mais difíceis.

E, por fim, à minha família, os quais também nunca me abandonaram e que desde meu nascimento estiveram comigo.

Resumo

Guilherme Mota Pereira. **Emparelhamentos em Grafos: *Explorando resultados clássicos em teoria dos grafos***. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Dado um grafo $G = (V, E)$, chamamos um subconjunto $F \subseteq E$ de *emparelhamento* se $e \cap f = \emptyset$, $\forall e, f \in F$ distintos. Neste trabalho, estudaremos os principais teoremas clássicos sobre emparelhamentos em grafos. Começaremos com uma breve introdução à teoria dos grafos. Seguimos para o Teorema de Berge na caracterização de emparelhamentos máximos em grafos gerais. Em seguida, apresentamos resultados em grafos bipartidos como o Teorema de König sobre emparelhamentos máximos e cobertura de vértices mínima, o Teorema do Casamento de Hall e o Teorema da Deficiência de Hall. Finalizamos voltando a grafos gerais, provando o Teorema de Tutte na caracterização de emparelhamentos perfeitos e a Fórmula de Tutte-Berge.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos. Emparelhamentos. Resultados Clássicos.

Abstract

Guilherme Mota Pereira. **Matchings in Graphs: *Exploring classic results in graph theory***. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2024.

Given a graph $G = (V, E)$, we call a subset $F \subseteq E$ a *matching* if $e \cap f = \emptyset$, for all distinct $e, f \in F$. In this work, we study the main classical theorems on matchings in graphs. We begin with a brief introduction to graph theory. We then proceed to Berge's Theorem in the characterization of maximum matchings in general graphs. Afterwards, we turn to results on bipartite graphs such as König's Theorem on maximum matchings and minimum vertex covers, Hall's [marriage] Theorem, and Hall's Deficiency Theorem. We conclude by returning to general graphs, proving Tutte's Theorem characterizing perfect matchings and the Tutte–Berge Formula.

Keywords: Graph Theory. Matchings. Classical Results.

Lista de figuras

1.1 Diagrama para demonstrar a relação de grafos induzidos. 6
1.2 Exemplo de grafo bipartido completo: No caso, $K_{3,4}$. 6

2.1 Diagrama de seleção de funcionários para o problema proposto. 10
2.2 Subgrafo do grafo bipartido anterior. 11
2.3 Exemplo da aplicação do teorema em um par de emparelhamentos aqui diferenciados pelas cores vermelho e azul. As componentes conexas induzidas são indicadas pelas cores dos vértices: laranja um caminho ímpar, verde um caminho par e magenta um circuito par. 14

3.1 Exemplo de aplicação do Teorema de Berge. Nele, podemos observar que tanto P_1 quanto P_2 são M_1-alternantes. Assim, após aplicação da diferença simétrica $M_2 := M_1 \oplus [E(P_1) \cup E(P_2)]$, obtemos um emparelhamento que cobre todos os vértices do grafo (e, portanto, M_2 é máximo). 19

5.1 Representação de um grafo G (A, B)-bipartido de emparelhamento máximo M. Notemos que (i) $B \cap Z = N(A \cap Z)$ com $|B \cap Z| = |A \cap Z \cap V_M|$; (ii) $A \setminus Z = N(B \setminus Z)$ com $|A \setminus Z| = |(B \setminus Z) \cap V_M|$; e (iii) podem existir vizinhos de $B \cap Z$ em $A \setminus Z$ desde que não sejam por arestas de M. 29

6.1 Exemplo simplificado do caso I, em que as arestas entre os vértices universais (em magenta) e as componentes conexas de $G - U$ são desenhadas de forma sutil por fins de clareza visual. Notemos que (i) as componentes pares (em ciano) admitem um emparelhamento perfeito; (ii) as componentes ímpares (em laranja) possuem um emparelhamento perfeito se retirarmos um vértice; e (iii) após a utilização de vértices em U_I (os vértices quadrados), o número de vértices restantes em U é par e um emparelhamento perfeito pôde ser encontrado. 35
6.2 Diagramação inicial simplificada do caso II. As "arestas" pontilhadas denotam que tais vértices não são adjacentes em G'. 36

6.3 Diagramação simplificada do caso II.b). A reconfiguração em P_y proposta ”permuta” as arestas entre um emparelhamento e outro. Isso permite o uso da aresta uy (em ciano) para criar o caminho A descrito. 36

Sumário

Introdução **1**

1 Introdução à Teoria dos Grafos **3**
1.1 Nomenclaturas em grafos . . . 3
1.2 Caminhos, operações e conexidade . . . 4
1.3 Componentes conexas e subgrafos induzidos . . . 5
1.4 Grafos bipartidos . . . 6

2 Introdução aos Emparelhamentos **9**
2.1 Motivação inicial e definição . . . 9
2.2 Diferença simétrica . . . 10
2.3 Grafos induzidos por diferenças simétricas . . . 11

3 Teorema de Berge **15**
3.1 Caminhos alternantes . . . 15
3.2 Caminhos aumentadores . . . 16
3.3 Teorema de Berge . . . 18

4 Teorema de König **21**
4.1 Cobertura por vértices . . . 21
4.2 Teorema de König . . . 22

5 Teoremas de Hall **25**
5.1 Teorema do Casamento de Hall . . . 25
5.2 Teorema da Deficiência de Hall . . . 27

6 Teoremas de Tutte **31**
6.1 Emparelhamentos perfeitos e propriedades maximais . . . 31
6.2 Teorema de Tutte . . . 32
6.3 Fórmula de Tutte-Berge . . . 37

7 Conclusão **41**

Referências **43**

Introdução

A teoria dos grafos teve origem no século XVIII com o trabalho de Leonhard Euler sobre o conhecido problema das Sete Pontes de Königsberg. Em 1736, Euler mostrou que o problema poderia ser estudado representando massas de terra como vértices e pontes como arestas, dando origem às primeiras ideias que mais tarde se desenvolveriam na teoria moderna dos grafos. Desde então, a teoria dos grafos tornou-se uma área central da matemática discreta, com aplicações em ciência da computação, pesquisa operacional, projeto de redes, escalonamento e diversas outras áreas.

Entre as diversas estruturas estudadas em grafos, os emparelhamentos desempenham um papel particularmente importante. De forma informal, um emparelhamento é um conjunto de arestas que não compartilham vértices. Emparelhamentos surgem naturalmente em problemas envolvendo o pareamento de objetos, como na atribuição de tarefas a trabalhadores, na alocação de estudantes a escolas ou na distribuição de recursos em redes. Devido a essas aplicações, a teoria de emparelhamentos tem sido amplamente estudada e levou ao surgimento de diversos resultados profundos e elegantes.

O desenvolvimento da teoria de emparelhamentos ao longo do século XX produziu uma sequência de teoremas fundamentais que descrevem a estrutura de emparelhamentos máximos e perfeitos. Um dos resultados centrais é o Teorema de Berge, que caracteriza emparelhamentos máximos por meio do conceito de caminhos aumentantes. Em grafos bipartidos, surgem ainda outros resultados estruturais, como o Teorema de Casamento de Hall, que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos, e o Teorema de König, que estabelece uma dualidade entre emparelhamentos máximos e coberturas mínimas de vértices. Outro resultado importante é o Teorema da Deficiência de Hall, que descreve o tamanho de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos.

Para grafos gerais, o estudo de emparelhamentos perfeitos culmina no Teorema de Tutte, que fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos arbitrários. Esse teorema conduz naturalmente à Fórmula de Tutte–Berge, que caracteriza o tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo geral.

O objetivo deste trabalho é apresentar esses resultados clássicos sobre emparelhamentos em grafos, enfatizando seu desenvolvimento lógico e as conexões entre eles.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 introduzimos conceitos básicos da teoria dos grafos. No Capítulo 2 definimos emparelhamentos e noções relacionadas. No Capítulo 3 apresentamos o Teorema de Berge e sua caracterização de emparelhamentos máximos. No Capítulo 4 estudamos o Teorema de König. No Capítulo 5 estudamos emparelhamentos em grafos bipartidos, incluindo o Teorema de Casamento de Hall e o Teorema da Deficiência de Hall. E, por fim, no Capítulo 6 retornamos a grafos gerais e apresentamos o Teorema de Tutte e a Fórmula de Tutte–Berge.

Capítulo 1

Introdução à Teoria dos Grafos

1.1 Nomenclaturas em grafos

A Teoria dos Grafos estabeleceu-se como uma das ferramentas matemáticas mais relevantes e versáteis para a modelagem de estruturas discretas. Das intrincadas redes de computadores e rotas logísticas às complexas relações interpessoais e alocações de recursos, os grafos fornecem uma linguagem natural para abstrair e analisar problemas que envolvem entidades e as conexões entre elas. Para compreendermos a profundidade desses modelos, iniciaremos com as fundações dessa teoria.

Um grafo G é um par ordenado (V, E) em que V é um conjunto qualquer e $E \subseteq \binom{V}{2}$ Chamamos V por conjunto de **vértices** de G, e costumeiramente o referenciamos com $V(G)$. E chamamos E por **arestas** de G, e refenciamo-lo com $E(G)$. Quando o contexto centra-se ao redor de um único grafo G, usualmente usaremos somente V e E para evitar peso de notação no momento da leitura.

Uma aresta $e \in E$ é um conjunto da forma $\{u, v\}$, com $u, v \in V$ **distintos**. Fazemos questão de enfatizar esta propriedade pois trabalharemos com grafos que não contém qualquer *loop*: um conjunto da forma $\{v, v\} = \{v\}$, para algum $v \in V$. Ao fazermos isso, garantimos que toda aresta $e \in E$ tem exatamente dois vértices distintos. Assim, por fins de praticidade, costumamos escrever $e = \{u, v\}$ simplesmente como $e = uv$.

Dizemos que uma aresta e **incide** em um vértice v se v é uma das "pontas" de e. Como e é um conjunto, podemos descrever a propriedade de incidência desta forma: $e \in E$ incide em $v \in V$ se $e \cap \{v\} = \{v\}$.

Dizemos que duas arestas distintas $e, f \in E$ são **adjacentes** se ambas compartilharem um vértice (ou seja, $e \cap f \neq \emptyset$). E dizemos que dois vértices $u, v \in V$ distintos são **vizinhos**

(ou **adjacentes**) se existir $e \in E$ tal que $e = uv$. E podemos expandir o conceito de vizinhança de um vértice:

Definição 1.1.1. *Uma **vizinhança** de um vértice $v \in V$ é um conjunto denotado por $N_G(v) := \{u \in V(G) : u \text{ é adjacente a } v\}$. O tamanho dessa vizinhança é chamada de **grau** de um vértice: $d_G(v) := |N_G(v)|$*

Usualmente omitiremos os subescritos quando G estiver subentendido pelo contexto, de modo a escrevermos simplesmente: $N(v)$ e $d(v)$.

1.2 Caminhos, operações e conexidade

Definição 1.2.1. *Um **caminho** P (de a até b) em um grafo G é uma sequência da forma:*

$$P := \langle a = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_k = b \rangle, k \in \mathbb{Z}_+, \text{ em que:}$$

i. $V(P) := \{v_o, v_1, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$ *com* $v_i \neq v_j$ *para todos* $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ *distintos;*

ii. $E(P) := \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq E(G)$*, em que* $e_i = v_{i-1}v_i$*, para todo* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$*;*

iii. $k = |P| := |E(P)|$*. Chamamos* $|P|$ *como o **tamanho** do caminho P. Se* $|P|$ *for par, dizemos que P é um caminho **par**; e se for ímpar, dizemos que P é um caminho **ímpar**.*

Uma consequência direta da definição acima é que $e_i \neq e_j$ para todos $i, j \in [k]$ distintos.

Dizemos que dois vértices (não necessariamente distintos) $u, v \in V$ **se comunicam** se existir um caminho em G de u até v. Perceba que dois vértices podem se comunicar por mais de um caminho: a existência não restringe nem a quantidade nem o comportamento dos caminhos. Denotaremos que $u, v \in V$ se comunicam por $u \sim v$. Note como, para qualquer vértice $u \in V$, $u \sim u$ pois um caminho de tamanho zero $P = \langle u = v_0 \rangle$ comunica u a ele mesmo.

Perceba que se $u \sim v$, para algum par $u, v \in V$, deve ocorrer que $v \sim u$: pois o mesmo caminho P_{uv} pode ser usado para comunicar v até u se invertermos a ordem dos vértices de P_{uv}. Assim, chamaremos $P_{uv}^{-1} := P_{vu}$ como o **caminho inverso** de P_{uv}. Iremos omitir o subescrito em certos contextos, de modo a denotarmos somente P^{-1} como o caminho inverso de P.

Sejam dados três vértices distintos $u, v, w \in V$. Se tivermos $u \sim v$ e $v \sim w$, deve ocorrer que $u \sim w$: se conectarmos P_{uv} a P_{vw} a partir do vértice v, então teremos um caminho que comunica u a w em G. Chamaremos este processo de **concatenação** de caminhos; e denotamo-lo como: $P_{uw} = P_{uv} \cdot P_{vw}$. Podemos omitir os subescritos quando a operação

$R = P \cdot Q$ está bem definida: quando os caminhos P e Q são válidos e o último vértice de P equivale ao vértice inicial de Q.

Por fim, sejam quatro vértices distintos $w, x, y, z \in V$ tais que $w \sim z$ e $x, y \in V(P)$, com $P := P_{wz}$ conforme Definição 1.2.1. Diremos que x é **antecessor** de y em P se existirem $i, j \in \{0, 1, \dots, |P|\}$ com $i < j$ de modo que $v_i = x$ e $v_j = y$; e diremos que x é **antecessor imediato** de y em P se existir $j \in \{1, \dots, |P|\}$ tal que $x = v_{j-1}$ e $y = v_j$ (caso no qual denotaremos $x = y_P^-$). Semelhantemente, diremos que x é **sucessor** de y em P se existirem $i, j \in \{0, 1, , \dots, |P|\}$ com $j < i$ de forma que $v_i = x$ e $v_j = y$; e diremos que x é **sucessor imediato** de y em P se existir $j \in [|P|]$ tal que $v_j = y$ e $x_{j+1} = x$ (caso em que denotaremos $x = y_P^+$). Quando o caminho estiver implícito em um contexto, também iremos omitir os subescritos.

Podemos concluir assim que a relação $\sim$ sobre V obedece as regras de reflexividade ($u \sim u$), simetria ($u \sim v \iff v \sim u$) e transitividade ($u \sim v \wedge v \sim w \implies u \sim w$). Portanto, a relação $\sim$ sobre V é uma relação de equivalência, cujas classes de equivalência são usadas para formarem as chamadas **componentes conexas**.

1.3 Componentes conexas e subgrafos induzidos

Em cada classe $C := [v], v \in V$, todos os vértices se comunicam entre si; porém, não se comunicam com vértices de fora de sua classe. Isto é, em um grafo G, se somente olharmos para os vértices de C, obteremos um grafo (menor) cujos vértices se comunicam. Ao extrairmos um grafo de outro, criamos o que chamamos de **subgrafo**.

Definição 1.3.1. *Dado um grafo $G = (V, E)$, chamamos $H = (S, F)$ de **subgrafo** de G se $S \subseteq V$ e $F \subseteq E \cap \binom{S}{2}$. Denotamos que H é subgrafo de G por: $H \subseteq G$. Em especial, dado um grafo G, chamamos de **subgrafo induzido**:*

a. $G[F] := (V(G), F)$: um subgrafo induzido por um conjunto de arestas $F \subseteq E(G)$;

b. $G[S] := \left(S, E(G) \cap \binom{S}{2}\right)$: um subgrafo induzido por um conjuntode vértices $S \subseteq V(G)$.

Com isso, podemos definir as componentes de um grafo:

Definição 1.3.2. *Seja G um grafo. Chamamos um subgrafo $H \subseteq G$ de **componente conexa** (ou somente **componente**) de G se existir $v \in V(H)$ tal que $H = G[[v]]$. Em outras palavras, $\forall u, v \in V(H) : u \sim v$; e $\forall u \in V(H), w \in V(G) \setminus V(H) : u \nsim w$. Chamamos G de **conexo** se o número de componentes conexas do grafo for exatamente um. Isto equivale a dizer que um grafo é conexo se todos os seus vértices conseguem se comunicar entre si dois a dois.*

Observemos o seguinte exemplo:

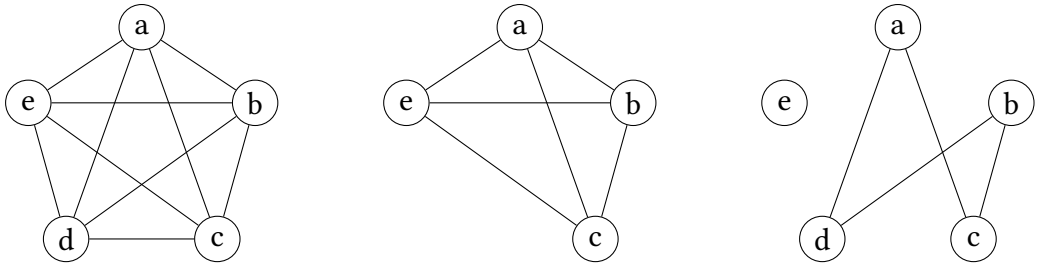


Figura 1.1: *Diagrama para demonstrar a relação de grafos induzidos.*

Nele, temos um grafo inicial mais à esquerda em que todos os cinco vértices estão conectados entre si dois-a-dois. Tal tipo de de grafo chamaremos de **clique** ou **grafo completo**, e denotaremo-los por K_n: ou seja, um grafo de n vértices cujo conjunto de arestas é exatamente $\binom{V(K_n)}{2}$.

Temos inicialmente um K_5. Dele, induzimos dois grafos: o do meio por vértices (equivalente a $G[\{a, b, c, e\}]$) e o mais à direita por arestas (equivalente a $G[\{ad, db, bc, ca\}]$). Vale ressaltar, por fim, que - embora a indução por vértices remova tanto os vértices quanto as arestas - a indução por arestas sempre mantém o conjunto de vértices intacto. E todo subgrafo H de um grafo G qualquer que tem $V(H) = V(G)$ é dito ser **gerador** de G.

1.4 Grafos bipartidos

Em preparação para o capítulo seguinte, outra classe de grafos importante para ser abordada são os grafos bipartidos.

Definição 1.4.1. *Chamaremos um grafo $G = (V, E)$ de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-**bipartido** se $\{A, B\}$ for uma bipartição de $V(G)$ tal que $E(G) \cap \left(\binom{A}{2} \cup \binom{B}{2}\right) = \emptyset$. Em outras palavras, G é (A, B)-bipartido se não existirem arestas entre dois vértices de A ou entre dois de B. Também, chamaremos G de **bipartido** se existirem $A, B \subseteq V(G)$ tais que G seja (A, B)-bipartido.*

Semelhantemente a K_n, se um grafo G (A, B)-bipartido tem o número máximo de arestas ($E(G) = \binom{A \cup B}{2} \setminus (\binom{A}{2} \cup \binom{B}{2})$), então chamaremos G de **bipartido completo** e denotaremos G por $K_{m,n}$, em que $m := |A|$ e $n := |B|$.

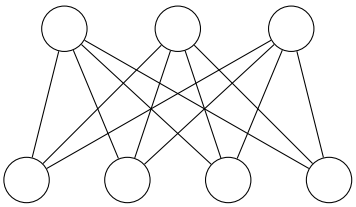


Figura 1.2: *Exemplo de grafo bipartido completo: No caso, $K_{3,4}$.*

Por fim, válido, por fins teóricos, entendermos mais sobre a estrutura dos grafos

bipartidos: algo que chamamos de **caracterização**. Uma caracterização envolve o relacionamento de duas definições/propriedades distintas que, apesar de primeira vista parecerem não-correlatas, são na verdade equivalentes! Encontraremos posteriormente outras caracterizações. Por agora, foquemos na seguinte caracterização para grafos bipartidos:

Teorema 1.4.1. *Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se, e só se, não existirem circuitos ímpares em G.*

Demonstração. Provaremos primeiro a implicação por contradição. Após isso, provaremos a inversa por indução no número de arestas de G.

($\implies$) Suponhamos que G seja (A, B)-bipartido, para alguma bipartição $\{A, B\}$ de $V(G)$, e que G contenha ao menos um circuito ímpar C de tamanho $\ell \in \mathbb{N}$ conforme 2.3.1. Suponhamos sem perda de generalidade que $v_0 \in A$ (se não for, permutamos os nomes de A e B entre si). Como G é bipartido, então para que e_1 pertença a $E(C)$ deve ocorrer que $v_1 \in B$. E, de forma semelhante, $v_2 \in A$. Podemos, assim, enxengar o padrão: $v_i \in A$ para cada subíndice par; e $v_i \in B$ para cada subíndice ímpar. Como C é ímpar, o último índice $k = \ell - 1$ é par, de forma que $v_k = v_{\ell-1} \in A$. Porém, como $v_\ell = v_0$, então $e_\ell = v_{\ell-1}v_\ell = v_{\ell-1}v_0 \in E(C)$: uma contradição pois $v_{\ell-1}, v_0 \in A$ e, logo, G não seria bipartido.

($\impliedby$) Para o caso base, selecionemos G com uma aresta: trivialmente, G é bipartido e não possui circuitos ímpares. Assim, fixemos $m \in \mathbb{N}$; e assumamos por hipótese de indução que, para todo grafo H com $|E(H)| < m$, vale que se H não contém circuitos ímpares, então H é bipartido. Com isso, seja G um grafo qualquer cujo número de arestas é m. Seja $\varphi \in E(G)$ uma aresta qualquer de G, e consideremos $H := G - \varphi$. Por hipótese de indução, como $|E(H)| = m - 1 < m$, então H é (A, B)-bipartido para alguma bipartição $\{A, B\}$ de G. Por fim, analisemos as possíveis maneiras nas quais ϕ pode estar em relação à bipartição de H:

1. Se $\varphi \in A \times B$. Nesse caso, a bipartição $\{A, B\}$ de $V(G) = V(H)$ também torna G (A, B)-bipartido.

2. Se $\varphi \in \binom{A}{2}$. Assumamos de início que não exista P_{uv} em H. Logo, poderemos decompor H em dois subgrafos desconexos entre si: um que contenha u e outro que contenha v. Digamos que tais *dois* subgrafos sejam D_u e D_v. Por hipótese de indução, deve ocorrer que D_u seja (A_u, B_u)-bipartido e D_v seja (A_v, B_v)-bipartido, para alguma bipartição $\{A_u, B_u\}$ de $V(D_u)$ e $\{A_v, B_v\}$ de $V(D_v)$. Desse modo, decorre que a bipartição $\{(A_u \cup B_v), (A_v \cup B_u)\}$ de $V(G)$ fará com que G seja bipartido.

   Assim, se provarmos que P_{uv} não existe em H, o resultado estará provado. Para isso, suponha por contradição que exista P_{uv} em H (A, B)-bipartido. Perceba que todo caminho P que conecta dois vértices de A deve ter tamanho par: algo que decorre

da alternância dos vértices de P entre vértices de A e de B. Como consequência, se existir P_{uv} em H, P_{uv} também deve existir em G. Isso faria com que a conexão de P_{uv} com a aresta $\varphi = uv$ formasse um circuito ímpar: algo que não existe pela hipótese do passo de indução.

□

Capítulo 2

Introdução aos Emparelhamentos

2.1 Motivação inicial e definição

Para começarmos, consideremos o seguinte cenário hipotético. Trabalhamos em uma empresa, e foi-nos dado o trabalho de gerenciar um projeto novo. Se fizermos um bom trabalho, receberemos uma promoção com aumento de salário! Assim, tomamos a oportunidade e começamos os preparativos.

Um de nossos muitos trabalhos é a organização da equipe. Para isso, foi-nos dado acesso ao banco de dados da empresa a fim de podermos consultar os funcionários disponíveis da empresa e suas proficiências. Suponhamos que, após planejamento, chegamos à conclusão que nosso projeto precisará de 5 vagas: desenvolvedor front-end (F), back-end (B), especialista em publicidade (P), testador (T) e designer (D). Convenientemente, 15 funcionários disponíveis têm primeiro nome distinto entre si, um para cada letra do alfabeto em ordem lexical: de (a) a (o). E suponha que achamos por melhor preencher cada vaga com exatamente um funcionário: ou seja, não há trabalhador com mais de uma função no projeto.

A partir do banco de dados, podemos representar o esquema funcionário-função em um grafo. Em particular, um grafo bipartido! Seja Π o conjunto das funções desejadas e Σ o conjunto dos funcionários disponíveis. Assim, seja G um grafo (Π, Σ)-bipartido em que existe uma aresta $\pi\sigma \in E(G)$ se, e só se, um trabalhador $\sigma \in \Sigma$ tiver a habilidade de trabalhar na função $\pi \in \Pi$. Notemos que um trabalhador pode ser proficiente em mais do que uma função. Assim, suponhamos que após a análise chegamos ao seguinte grafo, cujas arestas azuis representam uma designação de trabalho que encontramos:

Percebamos que conseguimos todas as vagas de função foram preenchidas com um

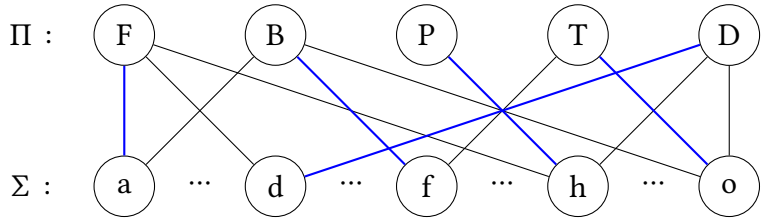


Figura 2.1: *Diagrama de seleção de funcionários para o problema proposto.*

funcionário. Mas essa designação não necessariamente é única: com os mesmos funcionários é possível obter uma designação ”um pra um” distinta da apresentada (quiçá considerando os outros funcionários).

O que encontramos como solução para o problema é um **emparelhamento**: um conjunto de arestas que, como o nome diz, relaciona vértices em pares. Nesse caso, encontramos um que **cobre** o conjunto Π: ou seja, para cada vértice em Π há uma aresta incidente do emparelhamento. E, por fim, podemos notar que o emparelhamento encontrado é **máximo** uma vez que não há arestas entre vértices do mesmo ”lado” do grafo. Todos estes tópicos serão progressivamente abordados nos capítulos de forma mais detalhada.

Vale destacar que, embora o exemplo da alocação de funcionários seja didático, o problema de encontrar emparelhamentos (especialmente os máximos ou de custo ótimo) transcende essa aplicação simples. Na pesquisa operacional e na ciência da computação, algoritmos de emparelhamento são vitais para resolver problemas complexos como o agendamento de tarefas de máquinas, a roteirização de veículos, o planejamento de grades horárias e até o design de transplantes renais cruzados. Esta relevância prática motiva o estudo puramente estrutural que desenvolveremos.

Formalmente, um **emparelhamento** $M \subseteq E$ de um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto cujas arestas são dois-a-dois não-adjacentes. Desse modo, notemos que para todo emparelhamento $M \subseteq E(G)$ vale que: se definirmos $H := G[M]$, então $d_H(v) \leq 1$ para todo $v \in V(H)$. Diremos que um vértice é **coberto** (ou **saturado**) por M se existir uma aresta de M que incida em tal vértice. Por outro lado, se não houver aresta de M que incida em um vértice, tal é dito ser **livre** de M. E um emparelhamento M é dito ser **máximo** em G se todo outro emparelhamento M' em G tem tamanho $|M'| \leq |M|$

2.2 Diferença simétrica

Voltemos ao trabalho proposto anteriormente. Suponha que o diagrama apresentado é o resultado final em que chegamos. E, para chegar nele, decidimos criar à mão progressivamente um emparelhamento entre as vagas a serem ocupadas e os funcionários.

Assim, imaginemos que começamos analisando aleatoriamente a lista de funcionários por (a), e vimos que (a) era competente em (F) e (B). E, arbitrariamente, demos a (a) a função (F). De forma semelhante, o funcionário seguinte foi (o), o qual - por ser experiente com (B),(T) e (D) - designamos arbitrariamente (D) a (T). Porém, aleatoriamente logo em seguida vem o funcionário (d), e temos um problema: d é proficiente somente apenas em (F) e (D), ambas já ocupadas respectivamente por (a) e (o). Então deveriamos descartar a adição de (d) e prosseguir para outro funcionário? Não necessariamente, vejamos como o esquema se encontra até o momento:

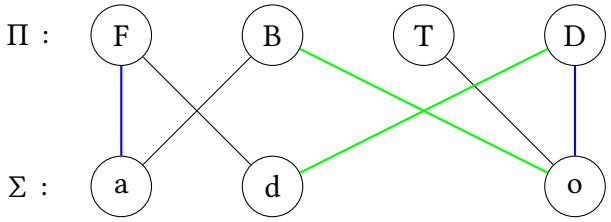


Figura 2.2: *Subgrafo do grafo bipartido anterior.*

Observemos que é possível uma redesignação das tarefas: podemos encarregar (o) a (T) [assim como no diagrama original]. Dessa forma, a vaga para (D) se torna disponível e podemos designar (D) a (d)! Isto é possível pois (o) é adjacente a um trabalho livre [(T)] e (D) é adjacente a um trabalhador livre [(d)]. Esta terminologia é proposital: em nossa redesignação, fizemos a troca de uma aresta do emparelhamento (o)(D) por duas: (o)(T) e (d)(D). Com isso, aumentamos o tamanho do nosso emparelhamento!

Precisamos, porém, estruturar e generalizar melhor a argumentação. E, para isso, faz-se fundamental o estudo da principal operação sobre emparelhamentos: a diferença simétrica. Formalmente, a **diferença simétrica** ($\oplus$) entre dois conjuntos quaisquer A, B é definida pela operação $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ou seja, quando focamos na "perspectiva"do conjunto A, a operação da diferença simétrica com B retira de A os elementos os quais A tem em comum com B e adiciona a A os elementos restantes de B.

2.3 Grafos induzidos por diferenças simétricas

Dado um grafo qualquer G, focaremos a seguir em operações da forma $E_1 \oplus E_2$, com $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ sendo emparelhamentos quaisquer (não necessariamente máximos) de G. Estruturas específicas surgem desta operação, e permitirão-nos formalizar o que é um emparelhamento máximo. Assim, comecemos com o seguinte lema:

Lema 2.3.1. *Sejam $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ dois emparelhamentos de um grafo G; e definamos $H := G[E_1 \oplus E_2]$. Logo, $\forall v \in V(H)$ vale que $d_H(v) \leq 2$.*

Demonstração. Suponha por contradição que exista $v \in V(H)$ tal que $d_H(v) = k \geq 3$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Podemos descrever a vizinhança de v em H por: $N_H(v) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\} \subseteq V(G)$.

Sabemos que cada vértice é incidido por, no máximo, uma aresta em cada emparelhamento. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que $u_1v \in E_1$ e $u_2v \in E_2$. Porém, chegamos a uma contradição: existem vértices adjacentes a v em H sem haver arestas que os conectem a v. □

O resultado acima nos diz que o **grau máximo** do grafo H, denotado por $\delta(H)$, induzido pela diferença simétrica de quaisquer dois emparelhamentos de G é, no máximo, 2. Isto deixa em aberto a questão: se $\Delta(H) \leq 2$, quais são as componentes conexas de H? Existe uma forma de descrevê-las de forma simples sem necessitar de uma alusão visual? Existe! E, para isso, precisamos definir o conceito de **circuito**.

Definição 2.3.1. *Um **circuito** (de um grafo $G = (V, E)$) é um grafo conexo cujos vértices tem grau dois. Um circuito cujo número de arestas é par é dito ser **par**; similarmente, um circuito cujo número de arestas for ímpar é dito ser **ímpar**. De forma semelhante ao que ocorre com caminhos, denotaremos C como:*

$$C = \langle v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = v_0 \rangle$$

i. $V(C) := \{v_0, v_1, \dots, v_{k-1}\} \subseteq V(G)$ *com* $v_i \neq v_j$ *para todos* $i, j \in \{0, 1, \dots, k\}$ *distintos;*

ii. $E(C) := \{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq E(G)$*, em que* $e_i = v_{i-1}v_i$*, para todo* $i \in \{1, 2, \dots, k\}$*;*

iii. $k = |C| := |E(C)| = |V(C)|$*. Chamamos* $|C|$ *como o **tamanho** do circuito* C*. Se* $|C|$ *for par, diremos que* C *é um circuito **par**; e se for ímpar, diremos que* C *é um circuito **ímpar**.*

Com a definição de caminho (1.2.1) e de circuito (2.3.1), podemos descrever as componentes conexas de um grafo induzido pela diferença simétrica entre quaisquer dois de seus emparelhamentos.

Teorema 2.3.1. *Sejam $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ dois emparelhamentos de um grafo G e definamos $H := G[E_1 \oplus E_2]$. Então, toda componente conexa de H é ou um circuito par ou um caminho.*

Demonstração. Seja $J \subseteq H$ uma componente conexa de H. Se $d_J(v) = 0$ para algum vértice $v \in V(J)$, ocorre que $J = (\{v\}, \emptyset)$; consequentemente, J é um caminho de tamanho zero. Portanto, assumamos que $d_H(v) \geq 1, \forall v \in V(J)$.

Dividamos a análise em casos.

1. Se todo vértice te grau dois. Por J ser conexo, temos por definição em 2.3.1 que J é um circuito. Afirmamos que J deve ser um circuito par. Suponha por contradição que J seja um circuito ímpar de tamanho $2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), e escrevamos J da seguinte forma:

$$J = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{2k}, e_{2k+1}, v_{2k+1} = v_0 \rangle^1$$

   Suponha sem perda de generalidade que $e_1 \in E_1$. Como consequência, $e_2 \in E_2$; e, por conseguinte, $e_3 \in E_1$. De fato, toda aresta de subíndice ímpar (1,3,5,... , $2k+1$) deve pertencer a E_1; e toda aresta de subíndice par (2,4,... , $2k$) deve pertencer a E_2. Porém, veja que tanto e_0 quanto e_{2k+1} - arestas adjacentes a v_0 - pertencem a E_1: uma contradição com a definição de emparelhamento. Portanto, neste caso, J deve ser um circuito par.

2. Se existir somente um vértice de grau 1. A construção de um grafo com esta propriedade é impossível. Veja que se $v \in V(J)$ é o único vértice de grau 1 de J, v deve se ligar com um vértice $u_1 \in V(J) \setminus \{v\}$ de grau 2. E, semelhantemente, u_1 deve estar conectado a um vértice $u_2 \in V(J) \setminus \{v, u_1\}$ de grau também 2. Este processo é repetido até todos os vértices de J forem usados. E como todos os vértices de J têm grau dois (com exceção de v), então o último vértice do processo descrito deverá ter grau 2. Porém, não haverá um vértice com o qual ele possa se ligar. Portanto, esta estrutura não existe.

3. Se existir $k \geq 3$ vértices de grau 1. Tal estrutura também é impossível. Seja $\{U, D\}$ uma partição de $V(J)$ em que $\forall u \in U, v \in D$ valha que $d_J(u) = 1$ e $d_J(v) = 2$. Podemos repetir o processo descrito no caso 2. Começemos com um vértice $u_1 \in U$ e vejamos que se ligarmos outro vértice $u_2 \in U \setminus \{u_1\}$ a ele, então $(\{u_1, u_2\}, uv)$ forma um subgrafo conexo dentro de J: uma contradição à conexidade de J. Logo, devemos conectar a u_1 um vértice em D, de modo que se, em algum momento do processo, adicionarmos um outro vértice de U, teremos novamente uma contradição à conexidade de J. Porém, como D é finito, eventualmente não teremos mais vértices em D para conectarmos à nossa subestrutura. E como $|U| \geq 2$, mesmo que adicionemos $u_2 \in U \setminus \{u_1\}$ ao final do processo, ainda sobrarão vértices sem conexões em nossa componente conexa J. Portanto, esta estrutura não existe.

4. Se todos os vértices têm grau dois com exceção de somente dois vértices com grau 1. Neste caso, J ocorre algo semelhante ao caso 3. Mas como $|U| = 2$, o processo tem fim com cada vértice de grau 1 em uma das "pontas" da estrutura. Esta estrutura é, de fato, um caminho.

[1] Note que, apesar de igualarmos J a uma sequência, J é na verdade um grafo. Fazemos este abuso de notação para simplificarmos a descrição da estrutura do grafo J.

□

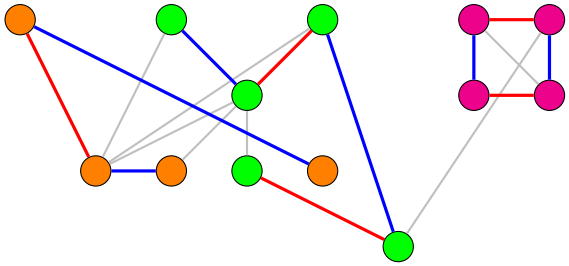


Figura 2.3: *Exemplo da aplicação do teorema em um par de emparelhamentos aqui diferenciados pelas cores vermelho e azul. As componentes conexas induzidas são indicadas pelas cores dos vértices: laranja um caminho ímpar, verde um caminho par e magenta um circuito par.*

Capítulo 3

Teorema de Berge

3.1 Caminhos alternantes

Atentemo-nos ao caso 4 da prova de 2.3.1, e definamos E_1, E_2, H e J conforme o enunciado da prova. Se J é um caminho em H de tamanho k, então podemos escrevê-lo conforme:

$$J = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k \rangle$$

Lembre-se que J é um subgrafo de H: um subgrafo induzido pela diferença simétrica de E_1 por E_2. Suponhamos sem perda de generalidade que $e_1 \in E_1$; logo, $e_2 \notin E_1$. Como consequência: $e_2 \in E_2$, o que implica que $e_3 \in E_1$. Este processo se repete com a alternância entre arestas dos emparelhamentos E_1 e E_2. Caminhos com esta propriedade são chamados de **caminhos alternantes**.

Definição 3.1.1. *Sejam $E_1, E_2 \subseteq E(G)$ emparelhamentos de um grafo G. Um caminho* **E_1E_2-*alternante*** *em G é uma sequência da forma:*

$$C = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k \rangle$$

cujo conjunto de arestas $E(C)$ pode ser particionado de forma que toda aresta de subíndice ímpar pertença a um dos emparelhamentos e toda de subíndice par pertença a outro. Em outras palavras: se, para algum $j \in \{1, 2\}$, $e_i \in E_j$, então $e_{i+1} \in E_{3-j}$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Porém, caminhos alternantes não precisam necessariamente serem sempre definidos a partir de dois emparelhamentos. Suponha que tenhamos um emparelhamento $M \subseteq E(G)$ de um grafo G. Suponha que exista um caminho P cujas arestas alternam entre arestas em M e arestas fora de M. Podemos definir caminhos com essa estrutura descrita:

Definição 3.1.2. *Seja $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento de um grafo G. Um caminho* **M-*alternante*** *em G é uma sequência da forma:*

$$P = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k \rangle$$

em que $e_i \in M \implies e_{i+1} \notin M$ e, também, $e_i \notin M \implies e_{i+1} \in M$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$.

Como não estamos trabalhando com dois emparelhamentos simultaneamente, note que os vértices nas pontas de um caminho M-alternante podem ou não estar cobertos por M. Em particular, caminhos alternantes de tamanho ímpar e cujas pontas são livres são chave para a caracterização de emparelhamentos máximos.

Porém, diferente dos circuitos alternantes, o estudo de caminhos alternantes é essencial para conseguirmos caracterizar emparelhamentos máximos em grafos quaisquer.

3.2 Caminhos aumentadores

Conforme essa definição, seja P um caminho M-alternante de um grafo G, e analisemos P conforme sua paridade.

1. Se P for par, então o número de arestas de M em P deve ser $|P|/2$. Sigamos com o seguinte processo: seja e_1 a primeira aresta de P, e suponhamos que $e_1 \in M$. Assim:

   $$e_1 \in M \implies e_2 \notin M \implies e_3 \in M \implies e_4 \notin M \implies \dots$$

   Este processo se repete até o último índice $2k = |P|, k \in \mathbb{N}$, já que P é par. Isto é, se $I \subset \{1, 3, 5, \dots, 2k-1\}$ é o conjunto de todos os subíndices ímpares das arestas de P, $\{e_i, i \in I\} \subseteq M$. Logo, há $|I| = ((2k-1)-(1))/2 + 1 = k = |P|/2$ arestas de P em M. Perceba que, caso $e_1 \notin M$, bastaria repetirmos o processo, mas de modo a olhar os subíndices pares das arestas de P.

2. Se P for ímpar, então o número de arestas de M em p é $(|P| \pm 1)/2$. Repitamos o processo descrito no ítem anterior, e declaremos $2k + 1 = |P|, k \in \mathbb{N}$. Veja que se $e_1 \in M$, então $e_{2k+1} \in M$; e, de forma análoga, $e_1 \notin M \implies e_{2k+1} \notin M$. Em outras palavras, se uma das pontas de P for livre de M, a ponta oposta também deve ser livre de M; semelhantemente para o caso de uma delas estar coberta por M. Caso ambas as pontas estejam cobertas por M, haverá $((2k+1)-(1))/2+1 = k+1 = (|P|+1)/2$ arestas de M em P. Porém, caso ambas sejam livres de M, haverá $((2k)-(2))/2+1 = k = (|P|-1)/2$ arestas de M em P.

Em especial, atentemo-nos ao caso em que P é ímpar e cujas pontas são livres de M.

Assumamos que P seja um caminho **maximal**: isto é, que não exista no grafo um outro caminho M-alternante Q que contenha P. Nesse caso, sabemos que P tem $(|P| - 1)/2$ arestas em M e, logo, deve ter $(|P| + 1)/2$ arestas *fora* de M: nesse caso, há mais arestas de P não-pertencentes a M do que pertencentes a M. Lembremos que estamos interessados em um emparelhamento máximo. Então, se conseguirmos garantir que o conjunto $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{|P|}\} \nsubseteq M$ é um emparelhamento do nosso grafo, poderemos fazer a seguinte troca: retiramos de M as arestas de $M \cap E(P)$ e adicionamos as arestas $E(P) \setminus M$. E se pudermos provar que esta operação gera um emparelhamento novo, então o número de arestas neste novo emparelhamento será maior do que aquele com o qual começamos. Para formalizar este conceito, retomaremos à ideia de diferença simétrica definida.

Seja M um emparelhamento de um grafo G e P um caminho M-alternante maximal com pontas livres de M. Com isso, consideremos a operação $M' := M \oplus E(P)$. Por definição, todas as arestas $e \in M \setminus E(P)$ também pertencerão a M'; logo, vejamos o que ocorre com as arestas de $E(P)$ em M'. Se $e \in M \cap E(P)$, então e por definição não pertencerá a M'. Em contrapartida, se $e \in E(P) \setminus M$, então $e \in F \cap E(P)$ visto que P é MF-alternante; desse modo, $e \in F \cap E(P)$ deverá estar em M'. Em outras palavras, a operação $M \oplus E(P)$ manterá todas as arestas de M que não estão em P; e cada aresta. E como F, por hipótese, tem mais arestas em $E(P)$ do que M, então $|E(P) \cap F| = |E(P) \cap M| + 1$.

Ao final, teremos um novo emparelhamento $M' \subseteq E(G)$ de G. De fato, percebamos que os únicos vértices com vizinhança afetada pela diferença simétrica são os vértices de P. E, por P ser MF-alternante, para cada única aresta de F adicionada a um vértice, uma única aresta de M é retirada deste mesmo vértice. Logo, nenhum vértice viola a propriedade definitiva de emparelhamento e, portanto, M' é um emparelhamento.

Mais que isso, analisemos $|M'|$. Sabemos por definição que $|M'| = |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M|$ pois ambos conjuntos são disjuntos. Vejamos que - conforme discutido - como P é MF-alternante, então $e \in M \setminus E(P) \iff e \in E(P) \cap F$ de sorte que $|M \setminus E(P)| = |E(P) \cap F|$. Dessa forma:

$$|M'| = |M \setminus E(P)| + |E(P) \setminus M| = |M \setminus E(P)| + |E(P) \cap F| = |M \setminus E(P)| + (|E(P) \cap M| + 1)$$
$$= (|M \setminus E(P)| + |E(P) \cap M|) + 1 = |M| + 1 \implies |M'| = |M| + 1.$$

Isto é: por meio de P, geramos um emparelhamento $M' = M \oplus E(P)$ cujo tamanho é estritamente maior que o do emparelhamento M com o qual começamos. Caminhos com esta propriedade são chamados de **caminhos aumentadores** pois, como o nome já sugere, podem ser usados para aumentar um emparelhamento em busca de um máximo.

Definição 3.2.1. *Seja M um emparelhamento de um grafo $G = (V, E)$. Um caminho em G*

M-alternante com pontas livres de M é chamado de ***caminho* M-*aumentador***.

3.3 Teorema de Berge

Com tudo o que discutimos até agora, podemos finalmente caracterizar os emparelhamentos máximos de um grafo qualquer. Raciocinemos: sempre que tivermos um emparelho M de um grafo G e encontrarmos em G um caminho M-aumentador P, poderemos aumentar o tamanho do nosso emparelhamento inicial por meio da operação $M' := M \oplus E(P)$. Logo, se não existir em G qualquer caminho M-aumentador, não poderemos aumentar nosso emparelhamento e M deve ser máximo por conseguinte.

Estamos perto de uma caracterização para emparelhamentos máximos. Até agora, sabemos que o tamanho máximo de um emparelhamento implica na inexistência de caminhos aumentadores; isto é: que a condição de inexistência é necessária para garantirmos o máximo. Disso, surge a pergunta: seria essa condição também suficiente? Em outras palavras: se não existir caminhos aumentadores, podemos afirmar que tal emparelhamento é máximo?

Tal pergunta foi respondida por Claude Berge que, em 1957, formalizou o célebre teorema que leva seu nome. A beleza e importância desta caracterização residem em conectar uma métrica "global" do grafo (a maximidade irrestrita do emparelhamento em toda a rede) a uma verificação puramente "local" e construtiva (a ausência de um caminho aumentador específico). Enunciaremos e provaremos este resultado primeiro demonstrado por Berge em Berge, 1957 a seguir.

Teorema 3.3.1. *Seja $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento de um grafo $G = (V, E)$. Então:*

$$M \text{ é máximo} \iff \text{não existem caminhos } M\text{-aumentadores em } G.$$ [1]

Demonstração. A implicação ($\implies$) é trivial, conforme já discutimos.

($\impliedby$) Suponhamos por contradição que não exista caminhos M-aumentadores em G e que M não é máximo. Seja, assim, $F \subseteq E(G)$ um emparelhamento máximo de G, e consideremos $H := G[M \oplus F]$. Com isso, analisemos em casos as componentes de H, as quais são ou circuitos pares ou caminhos MF-alternantes por 2.3.1.

1. Se toda componente conexa de H for um circuito par. É fácil de se observar que, se cada o circuito C é par, então o número de arestas de F em C equivale ao de M em C. Logo, como isso vale para todos os circuitos de H, ocorre que $|M| = |F|$ e, portanto, M é um emparelhamento máximo (uma contradição com nossa hipótese).

[1] Adaptação do teorema com base nas definições e convenções deste trabalho.

Observemos que, como cada circuito par de H contribui equitativamente a M e a F em número de arestas, podemos desconsiderá-las e analisar - a partir de agora - somente os caminhos MF-alternantes.

2. Se existe ao menos um caminho MF-alternante em H.

   (a) Se todo caminho MF-alternante for par. Nesse caso, chegamos à uma análise semelhante à do caso 1 e, dessa forma, chegamos a uma mesma conclusão.

   Também, podemos focar somente em analisar os caminhos MF-alternantes ímpares de H.

   (b) Se existe pelo menos um caminho P MF-alternante ímpar. Como P é ímpar, então *ou* ambas as pontas são livres de F *ou* ambas são livres de M. Se ambas forem livres de F, então P é um caminho F-aumentador e, logo, $F' := F \oplus E(P)$ é um emparelhamento de G estritamente maior que F: uma contradição à escolha de F. Por fim, se ambas as pontas de P forem livres de M, então P é um caminho M-aumentador, uma contradição à nossa hipótese de que não existem caminhos M-aumentadores.

Todos os casos levaram a uma contradição. □

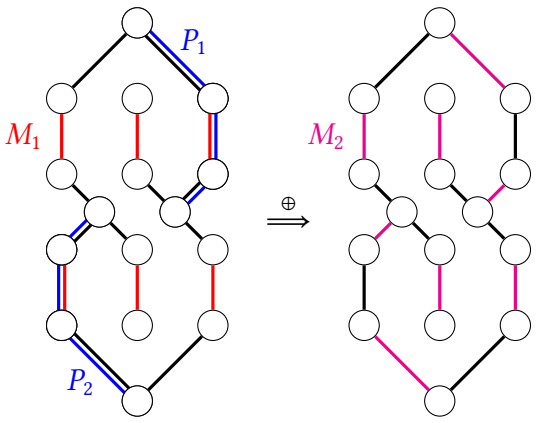


Figura 3.1: *Exemplo de aplicação do Teorema de Berge. Nele, podemos observar que tanto P_1 quanto P_2 são M_1-alternantes. Assim, após aplicação da diferença simétrica $M_2 := M_1 \oplus [E(P_1) \cup E(P_2)]$, obtemos um emparelhamento que cobre todos os vértices do grafo (e, portanto, M_2 é máximo).*

Capítulo 4

Teorema de König

4.1 Cobertura por vértices

Voltemos ao problema da motivação deste trabalho por um instante. Inicialmente, foi-nos dado um conjunto fixo de tarefas que tinham de ser preenchidas, e assumimos que o conjunto de funcionários fornecido era suficiente para fazer o emparelhamento de tarefas. Assumamos, porém, que tenhamos tentado emparelhar as tarefas, mas mesmo iterando por todos funcionários, não conseguimos preencher todas as vagas. Como podemos ter certeza e reportar ao nosso chefe de que não foi erro nosso: é algo que o conjunto de funcionários atual não consegue promover?

Para grafos bipartidos, existe uma forma de garantir que, se não conseguimos cobrir todos os vértices de um lado pelo emparelhamento, então podemos dar um certificado que comprova que um dos melhores resultados foi encontrado. E, para isso, precisaremos tangenciar um outro problema clássico em teoria dos grafos: a **cobertura por vértices**.

Definição 4.1.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Chamamos um subconjunto $S \subseteq V(G)$ de* ***cobertura por vértices*** *[das arestas do grafo] se $\forall e \in E(G), e \cap S \neq \emptyset$. Em outras palavras, toda aresta de G incide em pelo menos um vértice de S.*

Antes de continuarmos, é necessário fazermos nota de um ponto. Percebamos que todo grafo G admite um conjunto que seja uma cobertura: o próprio conjunto $V(G)$! Mas não é necessário que todos eles sejam usados. Então a pergunta que fica é: qual o mínimo de vértices que são necessários para termos uma cobertura? Não somente isso, mas percebamos que - até agora - abordamos emparelhamentos máximos sem uma estimativa numérica: queremos maximizar o emparelhamento, mas não sabemos até onde podemos ampliá-lo. Assim, faz-se justo definirmos as seguintes funções a fim de facilitar a discussão:

Definição 4.1.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denotaremos:*

$$\tau(G) := \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| \ : \ S \text{ é uma cobertura por vértices de } G\}$$
$$\mu(G) := \max_{M \subseteq E(G)} \{|M| \ : \ M \text{ é um emparelhamento de } G\}$$

*Chamamos $\tau(G)$ por **número de cobertura** de G (ou covering number), e $\mu(G)$ por **número de emparelhamento** de G (ou matching number).*

Há um resultado preliminar que relaciona ambas as funções para um grafo qualquer:
Lema 4.1.1. *Para todo grafo G, vale que $\tau(G) \geq \mu(G)$*

Demonstração. Seja M, S respectivamente um emparelhamento máximo e uma cobertura por vértices de G. Toda aresta de M é coberta por ao menos um vértice de S. □

4.2 Teorema de König

Em especial, para grafos bipartidos, a desigualdade apresentada no final da seção anterior vale em igualdade: isto é, o número de emparelhamento equivale ao número de cobertura! Esse resultado é conhecido como o primeiro e mais célebre exemplo de um "teorema min-max"na combinatória (uma manifestação da dualidade forte em otimização). Publicado em 1931 por Dénes Kőnig (frequentemente associado também a Jenő Egerváry por resultados similares sobre matrizes), ele demonstra elegantemente que o problema de maximização (emparelhamento) encontra seu gargalo exato em um problema de minimização (cobertura por vértices).

Isso se torna possível pois, dado um emparelhamento máximo de um grafo bipartido, podemos construir uma cobertura de vértices de tamanho exatamente igual ao número de emparelhamento, como veremos a seguir. Utilizamos uma formulação equivalente do Teorema de König, conforme apresentada em Lovász e Plummer, 2009, a qual é equivalente ao resultado clássico de Kőnig em Kőnig, 1931.
Teorema 4.2.1. ***(Teorema de König)*** *Para todo grafo G bipartido vale que $\tau(G) = \mu(G)$.*[1]

Demonstração. Conforme discutimos, sabemos que $\tau(G) \geq \mu(G)$. Logo, se encontrarmos uma cobertura por vértices S de tamanho $\mu(G)$, então teremos provado que $\tau(G) = \mu(G)$. Para isso, seja M um emparelhamento máximo de G. Provaremos que, se definirmos um conjunto $Z \subseteq V(G)$ apropriadamente, então $S := (A \setminus Z) \cup (B \cap Z)$ será uma cobertura por

[1] Adaptação do teorema com base nas definições e convenções deste trabalho.

vértices de G de tamanho $|S| = \mu(G)$. Esse é somente o escopo da prova: iremos detalhar cada passo com mais atenção a seguir.

Seja M um emparelhamento máximo em G, e definamos V_M como os vértices cobertos pelo emparelhamento M: ou seja, $V_M := \bigcup_{e \in M} e$. Com isso, definamos $W \subseteq A$ como os vértices de A que *não* são cobertos por M, e seja $Z \subseteq V(G)$ de tal forma que $z \in Z$ se, e somente se, existir um caminho M-alternante entre z e algum vértice $w \in W$, qualquer que seja $z \in V(G)$.

Conforme mencionamos anteriormente, seja $S := (A \setminus Z) \cup (B \cap Z)$. A fim de provarmos que S é uma cobertura por vértices [das arestas] de G, precisamos demonstrar que $e \cap S \neq \emptyset$ para qualquer aresta $e \in E(G)$. Assim, assumamos por contradição que S não seja uma cobertura por vértices, e seja $e \in E(G)$ tal que $e \cap S = \emptyset$. Como G é bipartido, devemos ter que $e = ab$ para algum $a \in A, b \in B$. Mais especificamente, a condição de que $e \cap [(A \setminus Z) \cup (B \cap Z)] = \emptyset$ implica que $a \in (A \cap Z)$ e $b \in (B \setminus Z)$.

A fim de prosseguirmos, faz-se necessário o compreendimento de como um caminho M-alternante em G se comporta. Mais especificamente quando uma das pontas de tal caminho pertence a W:

Lema 4.2.1. *Seja G um grafo (A, B)-bipartido, e definamos $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento máximo de G, com $W := A \setminus V_M$. Se $P = \langle w, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, x \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, é um caminho M-alternante em G, ocorre que:*

1. *se $x \in A$, então P é um caminho par em que $e_k \in M$;*
2. *se $x \in B$, então P é um caminho ímpar em que $e_k \notin M$.*

Demonstração. Seja P conforme o enunciado, e notemos que $e_1 \notin M$ pois $w \in W = A \setminus V_M$; e, como G é bipartido, necessariamente $v_1 \in B$. Assim, a fim de que P seja M-alternante, se existir $v_2 \in V(P)$ então $e_2 \in M$ e, semelhantemente, $v_2 \in A$. Esse processo continua enquanto houver vértices em $V(P)$, e facilmente podemos deduzir o lema. □

Como $a \in (A \cap Z)$, então pelo lema acima deduzimos que existe um caminho par M-alternante P de w a a de forma que a é coberta por M pela aresta $aa^- \in M$. Notemos que $b \in B \setminus Z$ implica que $b \notin V(P)$, de forma que $b \neq a^-$ e $ab \neq aa^-$. Assim, consideremos o caminho $P' := P \cdot \langle a, ab, b \rangle$. Uma vez que a já é coberto em M por aa^-, então $ab \notin M$. Consequentemente P' é um caminho M-alternante de w a b e, portanto, $b \in (B \cap Z)$: uma contradição. Vale notarmos também que P' é um caminho M-aumentador, e que pelo Teorema de Berge (3.3.1) M não seria um emparelhamento máximo: outra contradição. Logo, $S = (A \setminus Z) \cup (B \cap Z)$ é uma cobertura por vértices de G.

Resta provar que $|S| = |M|$. Para isso, primeiro provaremos que $(B \cap Z) \subseteq (B \cap V_M)$, e em seguida que $|(A \cap Z)| = |(B \setminus Z) \cap V_M|$. Com isso, vejamos que como $\{B \cap Z, (B \setminus Z) \cap V_M\}$ é uma partição de $(B \cap V_M)$, então:

$$|M| = |B \cap V_M| = |B \cap Z| + |(B \setminus Z) \cap V_M| = |B \cap Z| + |A \setminus Z| = |S|$$

Para provarmos que $(B \cap Z) \subset V_M$, assumamos por contradição que exista $v \in (B \cap Z) \setminus V_M$. Como $v \in Z$, existe um caminho M-alternante P ímpar de w a v para algum vértice $w \in W$. Se $|P| = 1$, então $P = \langle w, wb, b \rangle$, em que $wb \notin M$ e $v \notin V_M$. Nesse caso, percebamos que $M' := M \cup \{wb\}$ é um emparelhamento de G maior que M: uma contradição. Consequentemente, consideremos que $|P| > 1$. Vejamos: como $v, w \notin V_M$, então P é um caminho M-alternante cujas pontas v e w são livres de M. Logo, pela Definição 3.2.1, P é um caminho M-aumentador. Portanto, conforme o Teorema de Berge (Teorema 3.3.1), $M' := M \oplus E(P)$ é um emparelhamento de G maior que M, uma contradição. Portanto, $(B \cap Z) \subset V_M$.

Por fim, provaremos que $|A \setminus Z| = |(B \setminus Z) \cap V_M|$. Para este fim, mostraremos que para cada $a \in A \setminus Z$ existe um <u>único</u> $b \in [(B \setminus Z) \cap V_M]$ tal que $ab \in M$, e vice-versa.

Primeiro, seja $a \in A \setminus Z$ e suponhamos que exista $b \in B \cap Z$ tal que $ab \in M$. Visto que $b \in Z$, então existe um caminho M-alternante P ímpar de w a b para algum $w \in W$. Pelo mesmo lema, $bb^- \notin M$. E como $a \notin Z$ implica que $a \notin V(P)$, então $P' := P \cdot \langle b, ab, a \rangle$ é um caminho M-alternante de w a a: logo, $a \in Z$ e obtemos uma contradição. Essa argumentação pode ser utilizada (com pequenas modificações) para provar que para cada $b \in (B \setminus Z) \cap V_M$ existe um único $a \in A \setminus Z$ tal que $ab \in M$. Isto completa a nossa prova.

□

Capítulo 5

Teoremas de Hall

5.1 Teorema do Casamento de Hall

Nesta seção, utilizaremos o Teorema de König (4.2.1) para provarmos uma caracterização de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos. Primeiro, apresentaremos o caso em que um dos lados da bipartição é totalmente coberto com um emparelhamento (semelhante ao resultado hipotético do início deste trabalho). E, em seguida, mostraremos uma generalização do teorema, que nos dirá como generalizar a estrutura dos vértices não-emparelháveis em um emparelhamento máximo (de forma a resolver o problema proposto pela seção anterior).

Antes, construamos uma intuição da primeira caracterização proposta. Vejamos: um grafo bipartido tem somente dois lados, entre os quais podem haver arestas. Se quisermos um emparelhamento em que todos os vértices de um lado são cobertos, nada mais justo do que garantir que, para cada conjunto de vértices de um lado, haja pelo menos um outro vértice do outro lado. Isto garantiria, intuitivamente, que existe o que buscamos. E de fato: esta é uma forma menos formal da prova da necessidade da **condição de Hall**.

Historicamente, Philip Hall formulou essa resposta de existência em 1935, introduzindo-a sob um prisma que lhe rendeu a alcunha clássica de **Teorema do Casamento**. A analogia tradicional considera um grupo de homens e um grupo de mulheres, onde são traçadas arestas entre casais compatíveis. O teorema afirma que é possível casar todos os homens se, e somente se, para qualquer subgrupo de homens escolhido, o número de mulheres compatíveis com *pelo menos um* deles for maior ou igual ao número de homens do grupo. Formalizando matematicamente, dizemos que um conjunto de vértices $S \subseteq A$ de um grafo (A, B)-bipartido obedece a **condição de Hall** se $|S| \leq |N(S)|$.

Mostraremos agora que esta intuição pode ser expandida: a condição de Hall é, também, suficiente para garantir a existência de um emparelhamento que cubra um dos lados! Usaremos a formulação do **Teorema de Hall** apresentada em Lovász e Plummer, 2009 em cima do resultado apresentado por Hall em Hall, 1935.

Teorema 5.1.1. ***(Teorema [do Casamento] de Hall)*** *Seja G um grafo (A, B)-bipartido.*

$$\textit{Existe um emparelhamento que cobre } A \iff |S| \leq |N_G(S)|, \forall S \subseteq A.$$ [1]

Demonstração. Primeiro, provemos a direção de implicação ($\implies$). Suponha que $M \subseteq E(G)$ seja um emparelhamento de G (A, B)-bipartido que cubra A. Logo, deve ocorrer que cada vértice $a \in A$ tem um, e somente um, vizinho $b \in B$ tal que $ab \in M$. Denotemos tal vizinho $a^+ \in B$ para cada $a \in A$. Vejamos ainda que, para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ distintos, existem únicos $a_1^+, a_2^+ \in B$ distintos tais que $\{a_1 a_1^+, a_2 a_2^+\} \subseteq M$. Assim, para qualquer $S \subseteq A$, deve valer que $\{a^+ \,:\, a \in S\} \subseteq N_G(S)$. Portanto:

$$|S| = |\{a \,:\, a \in S\}| = |\{a^+ \,:\, a \in S\}| \leq |N_G(S)|$$

como queriamos mostrar.

Para a recíproca ($\impliedby$), provaremos sua contrapositiva: se M é um emparelhamento máximo que não cobre A, então existe $S \subseteq A$ tal que $|S| > |N(S)|$. Por hipótese, seja $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento máximo de um grafo G (A, B)-bipartido que não cobre A. Como consequência direta, ocorre que $|M| < |A|$.

Semelhante à prova do Teorema de König, sejam $W := A \setminus V_M$ e $Z \subseteq V(G)$ tal que $z \in Z$ se, e só se, existir um caminho M-alternante de algum $w \in W$ a z. Mostraremos que $S = A \cap Z$ é um conjunto que viola a condição de Hall: ou seja, que $|S| > |N_G(S)|$. Comecemos com a asserção de que $N_G(A \cap Z) \subseteq B \cap Z$ [2] (caso contrário, K não seria uma cobertura por vértices pois existiria uma aresta entre $A \cap Z$ e $B \setminus Z$). Logo, $|N_G(A \cap Z)| \leq |B \cap Z|$, de maneira que:

$$|N_G(A \cap Z)| \leq |B \cap Z| = |M| - |A \setminus Z|$$

pois, pelo Teorema 4.2.1, $|M| = |K| = |A \setminus Z| + |B \cap Z|$. Por fim, como $|M| < |A|$ e $|A \cap Z| = |A| - |A \setminus Z|$:

$$|N_G(A \cap Z)| \leq |M| - |A \setminus Z| < |A| - |A \setminus Z| = |A \cap Z|.$$

[1] no resultado original em Hall, 1935, A noção de sistema de representantes distintos é equivalente à existência de um emparelhamento que satura um dos lados em um grafo bipartido associado.

[2] apesar de não ser necessário nessa prova, veremos mais à frente que a relação também vale em igualdade.

Em outras palavras, $S = A \cap Z$ viola a condição de Hall.

□

5.2 Teorema da Deficiência de Hall

Porém, obviamente, não são todos os grafos bipartidos que admitam um emparelhamento que cubra um de seus lados. Nos casos mais gerais, podemos usar o Teorema da Deficiência de Hall. Para isso, definamos o seguinte conceito.

Definição 5.2.1. *Seja G um grafo (A, B)-bipartido. Para qualquer $S \subseteq V(X), X \in \{A, B\}$, chamaremos a função $\epsilon_X(S) := |S| - |N(S)|$ de **X-deficiência** do conjunto S [em G]. E denominaremos:*

$$\text{def}(X) := \max_{S \subseteq X}\{\epsilon_X(S)\}, \text{ com } X \in \{A, B\},$$

*como a **deficiência máxima** de X em G.*

Esta função possui um limitante superior.

Lema 5.2.1. *Para todo grafo G (A, B)-bipartido com emparelhamento máximo M vale que:*

$$\text{def}(A) \leq |A \setminus V_M|$$

Demonstração. Seja G um grafo (A, B)-bipartido, M um emparelhamento máximo e declaremos o conjunto $W := A \setminus V_M$. Agora, seja $S \subseteq A$ um subconjunto qualquer de A, e consideremos a seguinte bipartição de S: $\{S \setminus V_M, S \cap V_M\}$. Notemos a princípio que $|N(S)| \geq |S \cap V_M|$ porque $T := \{b \in V_M : ab \in M, \text{ para algum } a \in S \cap V_M\}$ é tal que $T \subseteq N(S)$ e $|N(S)| \geq |T| = |S \cap V_M|$. Consequentemente, podemos limitar $\epsilon(S)$ por:

$$\epsilon(S) = |S| - |N(S)| = (|S \setminus V_M| + |S \cap V_M|) - |N(S)| \leq (|S \setminus V_M| + |S \cap V_M|) - |S \cap V_M| = |S \setminus V_M|.$$

E como $(S \setminus V_M) \subseteq W, \forall S \subseteq A$, então $\epsilon(S) \leq |W|, \forall S \subseteq A$. Logo, $\text{def}(A) \leq |W|$. □

Assim como pode acontecer com outras caracterizações, de forma não necessariamente intuitiva, a função $\text{def}(A)$ nos dá a informação necessária para caracterizarmos os emparelhamentos máximos em grafos bipartidos quaisquer! É o resultado que apresentaremos a seguir, comumente chamado de **Terema da Deficiência de Hall**.

Apesar do nome, o teorema não foi provado por Hall. De fato, Hall somente introduziu em Hall, 1935 o conceito que posteriormente seria chamado de deficiência, cujo cunho é associado a Øystein Ore em Ore, 1955. Aqui, apresentaremos uma releitura da fórmula de Ore, 1955 e de sua prova apresentadas por László Lovász e Michael D. Plummer em

Lovász e Plummer, 2009:

Teorema 5.2.1. (Teorema da Deficiência de Hall) *Para todo grafo G (A, B)-bipartido com emparelhamento máximo M vale que:*

$$\text{def}(A) = |A \setminus V_M|.$$

Ou seja, o número de vértices não-emparelháveis de A em um emparelhamento máximo de G é caracterizado por $\text{def}(A)$.

Demonstração. Seja $M \subseteq E(G)$ um emparelhamento máximo de um grafo G (A, B)-bipartido. Percebamos que, se M cobre A, então $|S| \leq |N(S)|$, $\forall S \subseteq A$, pelo Teorema de Hall (5.1.1). Logo, $\forall S \subseteq A$, $\epsilon(S) = |S| - |N(S)| \leq 0$, de maneira que $\text{def}(A) \leq 0$. Assim, uma vez que o conjunto $S^* = \emptyset$ é tal que $\epsilon(S^*) = 0$, deve ocorrer que $\text{def}(A) = 0$.

Consideremos, então, os casos em que M não cobre A. E sejam $W := A \setminus V_M$ e $Z \subseteq V(G)$ com $z \in Z$ se, e só se, existir um caminho M-alternante entre z e algum $w \in W$. Pelo Lema 5.2.1, sabemos que $\text{def}(A) \leq |W|$. Logo, se encontrarmos um conjunto $S \subseteq A$ tal que $\epsilon(S) = |W|$, teremos que $\text{def}(A) = |W|$. Mostraremos que o conjunto $S^* := A \cap Z$ satisfaz essa condição.

Para isso, precisaremos demonstrar duas propriedades: i) $N(S^*) = B \cap Z$, e ii) $|B \cap Z| = |A \cap Z \cap V_M|$. Com elas, vejamos que, por um lado, $|N(A \cap Z)| = |B \cap Z|$; e, por outro, que $|B \cap Z| = |A \cap Z \cap V_M| = |A \cap Z| - |W|$. Dessa forma:

$$\epsilon(S^*) = \epsilon(A \cap Z) = |A \cap Z| - |N(A \cap Z)| = |A \cap Z| - (|A \cap Z| - |W|) = |W|.$$

Ou seja: $S^* = A \cap Z$ é um conjunto de deficiência $\epsilon(S^*) = |W|$, de forma que $\text{def}(A) = |W|$.

Para i), recapitulemos a prova do Teorema de Hall (5.1.1), em que provamos que $N(A \cap Z) \subseteq B \cap Z \subseteq V_M$. A fim de que $N(A \cap Z) = B \cap Z$, deve também ocorrer que $(B \cap Z) \subseteq N(A \cap Z)$. Assim, assumamos por contradição que exista $b \in (B \cap Z) \setminus (N(A \cap Z))$. E seja $a \in (A \cap V_M)$ o único vizinho de b tal que $ab \in M$. De início, ocorre que $a \notin Z$ pois, caso contrário, b seria vizinho de $A \cap Z$: uma contradição. Porém, percebamos que, pelo lema 4.2.1, se P é um caminho M-alternante de W a b, poderíamos estender P a a por $ab \in M$ de forma a manter M-alternância. Isso implica que $a \in Z$: uma contradição. Logo, $(B \cap Z) \subseteq N(A \cap Z)$, como queríamos provar.

Assim, resta provarmos ii) $|B \cap Z| = |A \cap Z \cap V_M|$. Para isso, basta relembrarmos do final da prova do Teorema de König (4.2.1) que $|(B \setminus Z) \cap V_M| = |A \setminus Z|$. Isso se dá pois tanto $\{A \cap Z \cap V_M, A \setminus Z\}$ quanto $\{B \cap Z, (B \setminus Z) \cap V_M\}$ são bipartições de $A \cap V_M$ e de $B \cap V_M$ respectivamente. Isto conclui nossa prova. □

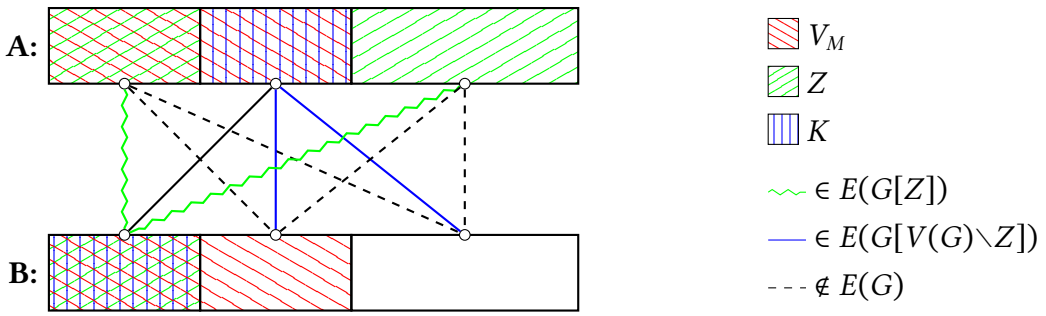


Figura 5.1: *Representação de um grafo G (A, B)-bipartido de emparelhamento máximo M. Notemos que (i) $B \cap Z = N(A \cap Z)$ com $|B \cap Z| = |A \cap Z \cap V_M|$; (ii) $A \setminus Z = N(B \setminus Z)$ com $|A \setminus Z| = |(B \setminus Z) \cap V_M|$; e (iii) podem existir vizinhos de $B \cap Z$ em $A \setminus Z$ desde que não sejam por arestas de M.*

Por fim, um simples corolário pode ser derivado do teorema acima apresentado:

Corolário 5.2.1. *Para todo grafo G (A, B)-bipartido vale que:*

$$\mu(G) = |A| - \text{def}(A) = |B| - \text{def}(B).$$

Capítulo 6

Teoremas de Tutte

6.1 Emparelhamentos perfeitos e propriedades maximais

Estamos a um passo de generalizar os resultados a fim de caracterizarmos os emparelhamentos máximos em grafos gerais. Inicialmente, definamos um conceito que já utilizamos previamente:

Definição 6.1.1. *Diremos que um grafo G* ***admite um emparelhamento perfeito*** *M, ou que M é um emparelhamento perfeito em G, se, e só se, $|M| = |V(G)|/2$.*

Um exemplo clássico que temos é o seguinte resultado:

Teorema 6.1.1. *O grafo bipartido completo $K_{n,n}$ ($n \in \mathbb{N}$) admite um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Uma forma de visualizar isso é através de uma prova por indução, em que podemos isolar um par de vértices qualquer e construir o emparelhamento perfeito a partir da hipótese de indução! □

Em se tratando de máximos, assim como estamos fazendo com emparelhamentos, faz-se necessária a distinção entre máximo e maximal. Quando dizemos que o emparelhamento M é máximo, queremos dizer que todo e qualquer outro emparelhamento no dito grafo tem tamanho no máximo $|M|$. Mas se dissermos que um emparelhamento é **maximal**, queremos dizer que não é possível adicionar qualquer outra aresta ao dito emparelhamento de modo a aumentar seu tamanho e manter as características de um emparelhamento. Para formalizarmos este conceito, e direcionarmos para a prova do primeiro teorema desta seção, definamos:

Definição 6.1.2. *Chamaremos um grafo G de **aresta-maximal em relação a uma propriedade** $\mathcal{P}$ (ou $\mathcal{P}$-aresta-maximal) se G não admite uma propriedade $\mathcal{P}$ em sua estrutura e o grafo $G + e$ admite $\mathcal{P}$ para toda aresta $e \notin E(G)$.*

6.2 Teorema de Tutte

Semelhantemente à analise preliminar que fizemos ao teorema de Hall, podemos debater previamente a intuição do Teorema de Tutte. Embora o caso bipartido possua sua elegância natural, são as construções para grafos arbitrários que representam um divisor de águas na combinatória moderna, encabeçadas brilhantemente por William T. Tutte em 1947. Quando discursamos sobre grafos bipartidos, chegamos à conclusão de que, intuitivamente, todo conjunto de vértices de um mesmo lado da bipartição deveria ter uma vizinhança com tamanho pelo menos o do conjunto inicial. Vejamos: qual palpite nas mesmas linhas do Teorema de Hall pode ser feita?

Suponhamos que tenhamos um conjunto de vértices S de um grafo qualquer G, e estudemos o que ocorre com o grafo se retirarmos S de G, denotando tal operação por $\mathbf{G - S := G[V(G) \setminus S]}$. Seja C uma das componentes de $G - S$. Sejamos diretos: se C é uma componente par, há chances de que esta componente por si só possua um emparelhamento perfeito. Porém, se C for uma componente ímpar, é impossível que C admita um emparelhamento perfeito em si.

Assim, ainda de forma abstrata, a única forma de G poder "concorrer" a ter um emparelhamento perfeito seria tentar usar os vértices de S, pois são - por construção - os únicos vértices de G conectados a C. Mas o que ocorre se $G - S$ tiver mais componentes ímpares do que vértices em S? Como as componentes de $G - S$ não se comunicam entre si em $G - S$, pode ser impossível de tal grafo ter um emparelhamento perfeito. Esta intuição pode ser refinada.

Definição 6.2.1. *Seja G um grafo. Denotaremos:*

$$\text{CI}(G) := \{H \subseteq G : H \text{ é uma componente conexa de } G \text{ com um número } \textit{ímpar} \text{ de vértices}\}$$

Com isso,

Definição 6.2.2. *Diremos que um conjunto de vértices S de um grafo G é **estável** (ou que **respeita** a condição de Tutte) em G se $|\text{CI}(G - S)| \leq |S|$. Caso contrário: se $|\text{CI}(G - S)| > |S|$, diremos que S é **frágil** (ou que **viola** a condição de Tutte) em G.*

Lema 6.2.1. *Seja S um conjunto de vértices de um grafo G. Então:*

1. *Se S é estável em G, então S também é estável em $G + e$, qualquer seja $e \notin E(G)$;*
2. *Se S é frágil em G, então S também é frágil em $G - e$, para qualquer $e \in E(G)$.*

Demonstração. Para (1), percebamos que a adição de uma aresta a G somente mantém ou diminui $|\text{CI}(G - S)|$: diminui caso conecte duas componentes ímpares de $G - S$ e mantém caso contrário. Semelhantemente para (2), a remoção de qualquer aresta de G somente mantém ou aumenta $|\text{CI}(G - S)|$: aumenta se uma componente par é dividida em duas componentes ímpares, e mantém caso contrário. □

O que discutimos será reapresentado na prova da necessidade da condição de Tutte para todo conjunto de vértices. E mostraremos que tal condição - assim como ocorrou com o Teorema de Hall - também é suficiente para garantirmos um emparelhamento perfeito! Utilizaremos aqui a formulação do teorema e a abordagem apresentada em West, 2001, baseada na construção de grafos maximais para a prova do Teorema de Tutte (formulada por Tutte em Tutte, 1947).

Teorema 6.2.1. (Teorema de Tutte) *Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer. Existe um emparelhamento perfeito em G se, e só se, $|\text{CI}(G - S)| \leq |S|$ para todo $S \subseteq V(G)$.*

Demonstração. Começemos pela prova da necessidade da condição ($\Longrightarrow$). Por contradição, seja G um grafo que admita um emparelhamento perfeito $M \subseteq E(G)$ e que exista $S \subseteq V(G)$ tal que $|\text{CI}(G - S)| > |S|$. Percebamos que não há arestas entre quaisquer componentes distintas de $G - S$. Consequentemente, visto que M é um emparelhamento perfeito, todos os vértices em cada componente pareiam-se entre si; com exceção de um vértice. Logo, cada vértice restante de componente deve estar pareado com outro vértice em S. Porém, como são $|\text{CI}(G - S)| > |S|$ componentes ímpares, o emparelhamento não é perfeito: uma contradição.

A fim de provarmos a suficiência da condição ($\Longleftarrow$), também procederemos por contradição. Assim, seja G um grafo que não admite emparelhamento perfeito apesar de todo conjunto $S \subseteq V(G)$ ser estável. Imediatamente, G deve ter um número par de vértices: caso contrário, o conjunto $S = \emptyset$ seria frágil em G. Nesta prova, usaremos $\mathcal{M}$ para referenciar a propriedade de um grafo G não admitir um emparelhamento perfeito.

Notemos que há a possibilidade de G não ser aresta-maximal em relação a $\mathcal{M}$. Ou seja: pode existir alguma aresta $e \in \binom{V}{2} \setminus E(G)$ (ou só $e \notin E(G)$) cuja adição a G produz um novo grafo que também admite $\mathcal{M}$. Assim, consideremos o seguinte processo iterativo:

i) defina $G^0 := G$;

ii) se, para algum $i \in \mathbb{N}$, G^i não for aresta-maximal, então defina $G^{i+1} := G^i + e$ para alguma aresta $e \notin E(G^i)$.

Como a sequência de grafos obtida é finita (o número de arestas é finito), então podemos definir $G' := G^k$ como o último grafo gerado.

Percebamos de início que, pelo lema 6.2.1, cada adição de aresta não altera a estabilidade de qualquer $S \subseteq V(G)$ de uma iteração para a seguinte. Logo, G' é $\mathcal{M}$-aresta-maximal e S é estável qualquer seja $S \subseteq V(G')$.

Provaremos a seguir que G' admite um emparelhamento perfeito: uma contradição à construção de G'. De fato, estaremos provando que não existe grafo $\mathcal{M}$-aresta-maximal com a estabilidade de todos os conjuntos de vértices. Isso se dá pois se $G' = G^k$ não é $\mathcal{M}$-aresta-maximal, e k é o último índice até o qual G^i permaneceu $\mathcal{M}$-aresta-maximal, então G^{k-1} deve ser $\mathcal{M}$-aresta-maximal. Porém, o mesmo resultado de G^k pode ser aplicado para G^{k-1} uma vez que ambos são $\mathcal{M}$-aresta-maximais, de modo a levar à mesma conclusão: G^{k-1} não é $\mathcal{M}$-aresta-maximal. Recursivamente, chegaremos que $G = G^0$ deve ter um emparelhamento perfeito: uma contradição à escolha de G.

Assim, analisaremos caso a caso as possíveis estruturas de G' com o fim de encontrar um emparelhamento perfeito. Definamos $U := \{u \in V(G') : d(u) = |V(G')| - 1\}$, que chamaremos de conjunto de **vértices universais** (pois são vizinhos de todos os vértices do grafo). Sem perda de generalidade, assumamos que $U \neq \emptyset$.[1]

I) Se toda componente conexa de $G - U$ é uma clique. Esse é o caso mais trivial. Primeiro, observemos que cada componente conexa par (se existir) admite um emparelhamento perfeito. E cada componente ímpar admite um emparelhamento máximo que deixa somente um vértice exposto. Assim, como U é estável em G' por hipótese, $\text{CI}(G' - U) \leq |U|$ implica cada unidade de vértice exposto deixado por cada componente ímpar pode ser pareado apropriadamente com algum vértice de U. Chamemos tal conjunto de vértices de U usados por U_I. Se ainda sobrarem vértices em U descobertos (ou seja, se $U \setminus U_I \neq \emptyset$), ainda podemos pareá-los. Vejamos que $|V(G)|$ deve ser par: senão $\emptyset$ seria um conjunto frágil em G' e isso contradiz a hipótese. Portanto, ao fim deste caso, como todos os outros vértices estão pareados, o número de vértices residuais em U formam uma clique par: e emparelhamos esses vértices restantes igual fizemos nas componentes pares.

II) Se existe uma componente conexa C^* de $G' - U$ que não é uma clique. Podemos deduzir que C^* tem ao menos 3 vértices pois, caso contrário, C^* seria um K_1 ou K_2. Logo, seja $x, w \in V(C^*)$ um par de vértices distintos não adjacentes entre si. Seja

[1] a prova no ítem II cobre o caso $U = \emptyset$.

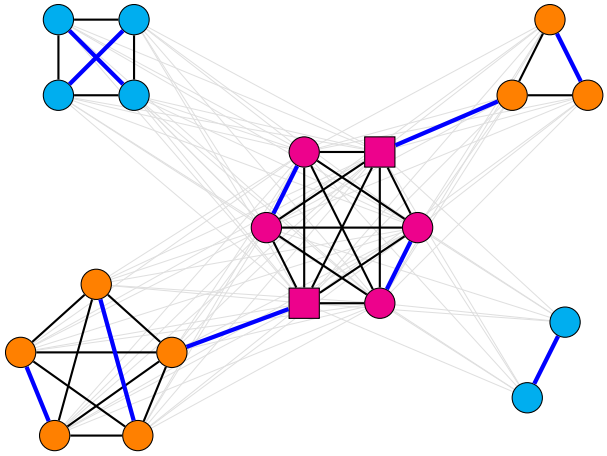


Figura 6.1: *Exemplo simplificado do caso I, em que as arestas entre os vértices universais (em magenta) e as componentes conexas de $G - U$ são desenhadas de forma sutil por fins de clareza visual. Notemos que (i) as componentes pares (em ciano) admitem um emparelhamento perfeito; (ii) as componentes ímpares (em laranja) possuem um emparelhamento perfeito se retirarmos um vértice; e (iii) após a utilização de vértices em U_I (os vértices quadrados), o número de vértices restantes em U é par e um emparelhamento perfeito pôde ser encontrado.*

também P um caminho mínimo de w a w em C^*, e sejam $u := x^+$ e $y := u^+$ em relação a P.[2] Percebamos que $xy \notin E(C^*)$ pois isso contrariaria a minimalidade de P. Como $u \notin U$ (por construção de C^*), então existe um vértice v distinto de x, w, e y tal que u, v também não são adjacentes entre si.

Recapitulemos: temos $xy, uv \notin E(C^*)$, e G' é $\mathcal{M}$-aresta-maximal. Logo, $G^{xy} := G' + xy$ e $G^{uv} := G' + uv$ admitem, respectivamente, um emparelhamento perfeito M^+_{xy} e M^+_{uv}. Atentemo-nos que $xy \in M^+_{xy}$ e $uv \in M^+_{uv}$. Assim, consideremos os emparelhamentos $M_{xy} := M^+_{xy} - xy$ e $M_{uv} := M^+_{uv} - uv$ aplicados a G'. E, como $|M^+_{xy}| = |M^+_{uv}| = |V(G')|/2$ por serem emparelhamentos perfeitos, então $|M_{xy}| = |M_{uv}| = |V(G')| - 1$. Extraímos que cada emparelhamento em G' cobre todos os vértices com exceção de dois: u e v em M_{uv}, e x e y em M_{xy}. Mostraremos a seguir que existe um caminho aumentador em G', de modo a criar um emparelhamento perfeito: a contradição proposta.

Consideremos $H := G'[M_{xy} \oplus M_{uv}]$. Pelo teorema 2.3.1, toda componente conexa de H é um circuito par ou um caminho. Podemos deduzir que os únicos vértices de grau 1 em H são u, v, x e y: a diferença simétrica manterá a única aresta que cobre cada vértice em um dos emparelhamentos. Por causa disso, u, v, x e y devem ser pontas de caminhos em H. Mais especificamente, são pontas dos 2 únicos caminhos alternantes em H.

[2] $y = w$ caso $|P| = 2$

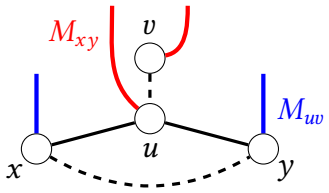


Figura 6.2: *Diagramação inicial simplificada do caso II. As "arestas" pontilhadas denotam que tais vértices não são adjacentes em G'.*

a) Se x e y são pontas de uma mesma componente P $M_{xy}M_{uv}$-alternante em H. Relembremos que $xy \notin E(H) \subseteq E(C^*)$. Assim, como pertencem a M_{uv} ambas as arestas que incidem em x e y em P, deve ocorrer que P é um caminho ímpar de tamanho pelo menos 3. Logo, por definição P é um caminho M_{xy}-aumentador; e a operação $M_{xy} \oplus E(P)$ cria um emparelhamento de tamanho $|V(G')|/2$. Ou seja, G' admite um emparelhamento perfeito: uma contradição.

b) Se x e y estão em componentes distintas: P_x e P_y, respectivamente. Como tanto x e y são vizinhos de u, assumamos sem perda de generalidade que $u \in V(P_x)$.[3] Por fins de simplicidade, assumamos também que $V(P_x)$ é ordenado de x a u e $V(P_y)$ de y a v. De imediato temos que ambos os caminhos são pares: cada caminho tem em si pontas cobertas por emparelhamentos distintos. Especialmente, foquemos em P_y. Reconfiguremos as arestas de P_y da seguinte forma: para cada aresta $e \in E(P_y) \cap M_{xy}$, ponhamos e em M_{uv}; e cada $f \in E(P_y) \cap M_{uv}$, em M_{xy}. Com isso, seja $A := P_x \cdot \langle u, uy, y \rangle \cdot P_y$, e sejam y^+ e u^- considerados em relação a A. Notemos que A é um caminho ímpar cujas pontas são livres de M_{xy} (pois são cobertas por M_{uv}) e em que $yy^+, uu^- \in M_{xy}$ e $uy \notin M_{xy} \cup M_{uv}$. Portanto, A é um caminho M_{xy}-aumentador, e a operação $M_{xy} \oplus E(A)$ gera um emparelhamento perfeito: a contradição final.

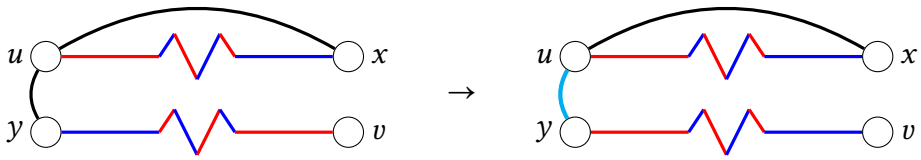


Figura 6.3: *Diagramação simplificada do caso II.b). A reconfiguração em P_y proposta "permuta" as arestas entre um emparelhamento e outro. Isso permite o uso da aresta uy (em ciano) para criar o caminho A descrito.*

□

[3] caso $u \in V(P_y)$, nomeie x como y e vice-versa.

6.3 Fórmula de Tutte-Berge

Por fim, semelhantemente ao que fizemos com a deficiência de Hall, seguimos com a seguinte definição.

Definição 6.3.1. *Seja G um grafo. Para qualquer $S \subseteq V(G)$, Chamaremos a função $\delta(S) := |\text{ci}(G - S)| - |S|$ por **deficiência** de S em G, de forma que $\delta(S) > 0$ se, e só se, S é frágil em G. E denominaremos a seguinte função por **deficiência máxima de** G:*

$$\text{def}(G) := \max_{S \subseteq V(G)} \{\delta(S)\}.$$

Seguindo esta definição, o seguinte resultado vale:

Corolário 6.3.1. *Para todo grafo G:*

$$\text{def}(G) = |V(G)| - 2\mu(G)$$

Ou seja, o número de vértices não-emparelháveis em um emparelhamento máximo de G é caracterizado por $\text{def}(G)$.

Porém, diferentemente do que fizemos para provar diretamente o Teorema da Deficiência de Hall (5.2.1), provaremos um resultado correlacionado mais comum. A **fórmula de Tutte–Berge** apresentada aqui é conforme West, 2001, sendo um refinamento de resultados clássicos sobre emparelhamentos iniciados por Tutte em Tutte, 1947.

Teorema 6.3.1. (Fórmula de Tutte-Berge) *Para todo grafo G:*

$$\mu(G) = \frac{1}{2} \min_{S \subseteq V(G)} \{|V(G)| - \delta(S)\}$$

Demonstração. (adaptada de West, 2001). Primeiramente, percebamos que, se G admite um emparelhamento perfeito, então pelo Teorema de Tutte (6.2.1) todo conjunto $S \subseteq V(G)$ é estável e, logo, $\delta(S) \leq 0$. Desta forma, $\text{def}(G) \leq 0$. Como $\delta(\emptyset) = 0$, então $\text{def}(G) = 0$ e o resultado está provado. Logo, trabalhemos com os casos em que $\mu(G) < |V(G)|/2$ - nos quais $\text{def}(G) > 0$ uma vez que existe ao menos um conjunto frágil como consequência do Teorema de Tutte (6.2.1).

Assim, provemos primeiro a desigualdade ($\leq$). Em outras palavras, $2\mu(G) \leq \min_{S \subseteq V(G)}\{n - \delta(S)\}$. E isso é simples de ver pois, para qualquer conjunto $S \subseteq V(G)$ frágil em G, um emparelhamento máximo deixa ao menos $\delta(S)$ vértices descobertos em G (um argumento semelhante ao usado na prova da necessidade do Teorema de Tutte).

Agora, a segunda desigualdade ($\geq$). Para isso, consideremos $S^* := \text{argmax}_{S \subseteq V(G)}\{\delta(S)\}$

que maximiza a deficiência e seja $d := \max_{S \subseteq V(G)}\{|V(G)| - \delta(S)\}$ E, assim, consideremos a seguinte construção do grafo G'. De forma simplificada, adicionamos paralelamente à G uma clique de tamanho d, e tornamos os vértices dessa clique em vértices universais em G'. Mais formalmente:

i) para algum conjunto U disjunto a $V(G)$ e de tamanho d, $V(G') := V(G) \cup U$;

ii) $E(G) := E(G) \cup \binom{U}{2} \cup \{uv : u \in U, v \in V(G)\}$.

Provaremos que todo $S \subseteq V(G')$ é estável, de forma a provar que G' admite um emparelhamento perfeito pelo Teorema de Tutte. E isso será o suficiente uma vez que um emparelhamento perfeito em G' implica que G admite um emparelhamento de tamanho pelo menos $|V(G)| - d$. Com isso, investiguemos os conjuntos $S \subseteq V(G')$:

I) Se $S = \emptyset$, então $|\text{ci}(G' - S)| \leq |S^*|$ pois o número de vértices é par em decorrência do lema 6.3.1 (cuja prova encontra-se abaixo desta). Desta forma, S é estável em G'

II) Se $S \supsetneq K_d$. Nesse caso, S é estável em G' pois S cria somente uma componente conexa. Logo, S é estável em G' independente da paridade da componente. E, logo, S é estável em G'.

III) Se $S \supseteq K_d$. Particionemos S da seguinte forma $S = R \cup V(K_d)$. Aqui, podemos notar que $|\text{ci}(G' - S)| = |\text{ci}(G - R)| \leq |R| + d = |S|$, de modo que S também é estável em G'.

Portanto, segue do Teorema 6.2.1 que G' possui um emparelhamento perfeito.

□

Lema 6.3.1. *Seja G um grafo de ordem n. Para todo $S \subseteq V(G)$ vale que:*

$$n \equiv \delta(S) \pmod 2.$$

Isto também implica que todos os conjuntos de vértices possuem mesma paridade em relação a δ.

Demonstração. Denotemos $\text{c}(G)$ e $\text{cp}(G)$, respectivamente, como o conjunto de componentes conexas de G e das componentes conexas pares de G. Assim, começemos com o fato de que $n - |S| = \sum_{C \in \text{c}(G-S)} |V(C)|$. Logo:

$$\begin{aligned} n - |S| &\equiv \sum_{C \in \text{c}(G-S)} |V(C)| && \pmod 2 \\ &\equiv \sum_{P \in \text{cp}(G-S)} |V(P)| + \sum_{I \in \text{ci}(G-S)} |V(I)| && \pmod 2. \end{aligned}$$

Como $\sum_{P \in \text{cp}(G-S)} |V(P)|$ é sempre par, então podemos retirá-lo da equivalência. E como cada componente ímpar contribui com um para a paridade, então:

$$n - |S| \equiv \sum_{I \in \text{CI}(G-S)} |V(I)| \equiv |\text{CI}(G-S)| \pmod 2$$

Portanto: $n - |S| \equiv |\text{CI}(G-S)| \pmod 2$. Por fim, uma vez que $|S| \equiv -|S| \pmod 2$, então:

$$n \equiv |\text{CI}(G-S)| + |S| \equiv |\text{CI}(G-S)| - |S| =: \delta(S) \pmod 2.$$

□

Um resultado que resulta diretamente das definições 5.2.1 e 6.3.1 é que:

Corolário 6.3.2. *Para todo grafo G (A, B)-bipartido:*

$$\text{def}(G) = \text{def}(A) + \text{def}(B).$$

Isto é, de forma não tão intuitiva, existe $S \subseteq V(G)$ que maximiza $|\text{CI}(G-S)| - |S|$ se, e só se, existirem $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ tais que $|A'| - |N(A')|$ e $|B'| - N(B')$ são máximos! De forma elegante, dois resultados de naturezas diferentes, porém ainda assim correlacionadas.

E assim, encerramos esta jornada estrutural. Vale ressaltar que os teoremas de Hall, Kőnig, Berge e Tutte forneceram o arcabouço matemático definitivo sobre o qual a ciência da computação baseou-se. Foi exatamente a intersecção do Teorema de Berge com os estudos de componentes ímpares e deficiências descritas por Tutte que permitiu a Jack Edmonds, em 1965, desenvolver o Algoritmo de Blossom. Este algoritmo genial demonstrou ser a primeira solução em tempo polinomial capaz de encontrar emparelhamentos máximos em grafos arbitrários, solidificando para sempre a sinergia profunda entre existencialidade combinatória e computabilidade.

Capítulo 7

Conclusão

O desenvolvimento deste texto buscou evidenciar a relevância da Teoria dos Grafos não apenas como um mecanismo para a modelagem abstrata, mas como uma ferramenta matemática rigorosa para a formulação e resolução de problemas de otimização combinatória. Inicialmente motivados por um problema prático de alocação, a designação de funcionários a funções específicas, estruturou-se uma análise formal a respeito de emparelhamentos em grafos.

A análise teve início com o estudo em grafos bipartidos, nos quais foi possível demonstrar como propriedades estruturais globais podem ser traduzidas em verificações analíticas consistentes. Dénes Kőnig, em 1931, estabeleceu um dos pilares desta demonstração ao provar a dualidade min-max entre o tamanho de um emparelhamento máximo e uma cobertura mínima por vértices. A partir deste resultado, o Teorema de Hall permitiu caracterizar a existência de emparelhamentos que cobrem um determinado conjunto de vértices por meio de uma restrição estrita sobre a cardinalidade de vizinhanças. Nas situações em que a condição não é satisfeita, a inviabilidade de um emparelhamento pode sempre ser fundamentada pela existência de um certificado de insuficiência estrutural.

A necessidade de aplicar metodologias equivalentes a grafos arbitrários demandou a formulação de resultados mais diretos sobre as arestas. Com base na formalização de Claude Berge em 1957, comprovou-se a universalidade dos caminhos aumentadores: um emparelhamento em um grafo qualquer deixa de ser máximo se, e somente se, existir no grafo um respectivo caminho aumentador. Esta demonstração expandiu o escopo empírico de análise, desvinculando as análises de máxima cardinalidade a restrições exclusivas de estruturas bipartidas.

A principal caracterização teórica do tema consolidou-se pelas contribuições de William

T. Tutte e pela decorrente Fórmula de Tutte-Berge. Tutte determinou que, para grafos gerais, o impeditivo para a existência de emparelhamentos perfeitos fundamenta-se intrinsecamente na paridade do número de vértices das componentes conexas geradas após a remoção de um conjunto arbitrário. A noção de deficiência, que em grafos bipartidos correspondia a uma medição simples entre dois conjuntos independentes, foi generalizada rigorosamente respeitando as mesmas limitações da dualidade.

A consolidação destas bases forneceu fundamentos estruturais diretos para a formulação de algoritmos eficientes no tratamento de grafos computacionais. Foi a partir da formulação destas definições que, em 1965, Jack Edmonds elaborou o Algoritmo de Blossom. Tal concepção elucidou o desenvolvimento de emparelhamentos máximos em grafos arbitrários em tempo polinomial, conectando definitivamente as propriedades construídas pela Teoria dos Grafos às soluções computacionais em pesquisa operacional.

Em síntese, o estudo sistemático de emparelhamentos demonstra a aplicação da conectividade entre vértices e arestas isoladas para a resolução de teoremas de implicações abrangentes. Este trabalho buscou apresentar formalmente as fundamentações algébricas juntamente à intuição subjacente a tais formulações. Por fim, espera-se que a dedução lógica dos teoremas de Kőnig, Hall, Berge e Tutte ofereça uma visão clara acerca dos alicerces que impulsionaram este segmento da combinatória clássica no decorrer do último século.

Referências

[Berge 1957] Claude Berge. "Two theorems in graph theory". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 43.9 (1957), pp. 842–844. doi: 10.1073/pnas.43.9.842 (citado na pg. 18).

[Hall 1935] Philip Hall. "On representatives of subsets". *Journal of the London Mathematical Society* 10.1 (1935), pp. 26–30. doi: 10.1112/jlms/s1-10.37.26 (citado nas pgs. 26, 27).

[Kőnig 1931] Dénes Kőnig. "Graphok és matrixok". Húngaro. *Matematikai és Fizikai Lapok* 38 (1931). Tradução: Szárnyas, G. Graphs and matrices: a translation of "Graphok és matrixok" by Dénes Kőnig (1931). arXiv:2009.03780, 2020, pp. 116–119. url: https://arxiv.org/abs/2009.03780 (citado na pg. 22).

[Lovász e Plummer 2009] László Lovász e Michael D. Plummer. *Matching Theory*. Originally published by North-Holland, 1986. Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. isbn: 978-0-8218-4759-6 (citado nas pgs. 22, 26, 28).

[Ore 1955] Øystein Ore. "Graphs and matching theorems". *Duke Mathematical Journal* 22.4 (1955), pp. 625–639. url: https://projecteuclid.org/journals/duke-mathematical-journal/volume-22/issue-4/Graphs-and-matching-theorems/10.1215/S0012-7094-55-02268-7.short (citado na pg. 27).

[Tutte 1947] W. T. Tutte. "The factorisation of linear graphs". *Canadian Journal of Mathematics* 4 (1947), pp. 314–328. doi: 10.4153/CJM-1952-028-2 (citado nas pgs. 33, 37).

[West 2001] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. 2ª ed. Prentice Hall, 2001 (citado nas pgs. 33, 37).