Figuras, ladrilhos, dominós e mosaicos

Linguagens Bidimensionais Reconhecíveis

Fabiano Mitsuo Sato (mitsuo@linux.ime.usp.br)

Orientadora: Prof. Nami Kobayashi (nami@ime.usp.br)

Instituto de Matemática e Estatística - IME

Universidade de São Paulo - USP

Objetivos e motivações

- **Objetivos**: estender os conceitos e as técnicas da Teoria de Linguagens Formais para duas dimensões.

- **Motivações**: problemas relacionados a reconhecimento de padrões e processamento de imagens.

Figuras

Uma **figura** é uma matriz de símbolos de um alfabeto finito.

$\Sigma = \{0, 1\}$

$$p = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \widehat{p} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \# & \# & \# & \# & \# \\ \hline \# & 1 & 0 & 0 & \# \\ \hline \# & 0 & 1 & 0 & \# \\ \hline \# & 0 & 0 & 1 & \# \\ \hline \# & \# & \# & \# & \# \\ \hline \end{array}$$

$l_1(p)$ - número de linhas de p;

$l_2(p)$ - número de colunas de p;

$(l_1(p), l_2(p))$ - tamanho de p;

$p(i, j)$ - símbolo de p na linha i e coluna j.

Linguagens bidimensionais

Uma **linguagem bidimensional** é um conjunto de figuras.

Σ^{**} - linguagem de todas as figuras sobre Σ.

Exemplo. Linguagem L_{Id} dos quadrados sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições:

$$L_{Id} = \{p \in \Sigma^{**} \mid l_1(p) = l_2(p) > 0, p(i,i) = 1 \text{ e } p(i,j) = 0 \text{ para todo } i \neq j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq l_1(p)\}.$$

Operações e projeções

São definidas as operações de

- $\varobar$: concatenação por coluna e
- $*\varobar$: fecho reflexivo transitivo;
- $\ominus$: concatenação por linha e
- $*\ominus$: fecho reflexivo transitivo.

Uma projeção é uma função $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$.

- $\pi(a)$, $a \in \Gamma$;
- $\pi(p)$, $p \in \Gamma^{**}$;
- $\pi(L)$, $L \subseteq \Gamma^{**}$.

Expressões regulares

A linguagem L_l das figuras que são da forma

$$\underbrace{\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{2}}_{\geq 0 \text{ repetições}}\boxed{1}\underbrace{\boxed{0}\boxed{\cdots}\boxed{0}}_{\geq 0 \text{ repetições}}$$

pode ser definida por $L_l = L(2^{*\obar} \obar 1 \obar 0^{*\obar})$.

Expressões regulares

A linguagem L_l das figuras que são da forma

$$\underbrace{\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{2}}_{\geq 0 \text{ repetições}}\boxed{1}\underbrace{\boxed{0}\boxed{\cdots}\boxed{0}}_{\geq 0 \text{ repetições}}$$

pode ser definida por $L_l = L(2^{*\oplus} \oplus 1 \oplus 0^{*\oplus})$.

Analogamente, a linguagem L_c das figuras que são da forma exibida ao lado pode ser definida por $L_c = L(0^{*\ominus} \ominus 1 \ominus 2^{*\ominus})$.

$$\begin{array}{l}\left.\begin{array}{|c|}\hline 0\\ \hline \cdots \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}\right\} \geq 0 \text{ repetições}\\ \begin{array}{|c|} 1 \\ \hline\end{array} \\ \left.\begin{array}{|c|}\hline 2\\ \hline \cdots \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}\right\} \geq 0 \text{ repetições}\end{array}$$

Expressões regulares (2)

- $L_l = L(2^{*\oplus} \oplus 1 \oplus 0^{*\oplus})$;
- $L_c = L(0^{*\ominus} \ominus 1 \ominus 2^{*\ominus})$;
- $\pi : \Gamma \rightarrow \{0,1\}$ tal que $\pi(0) = \pi(2) = 0$ e $\pi(1) = 1$.

$$L_{Id} = \pi({L_l}^{*\ominus} \cap {L_c}^{*\oplus}).$$

Autômatos bidimensionais

Autômato finito de 4 vias

- Blum e Hewitt (1967);
- generaliza o autômato finito de 2 vias;
- controle move-se para esquerda, direita, cima e baixo.

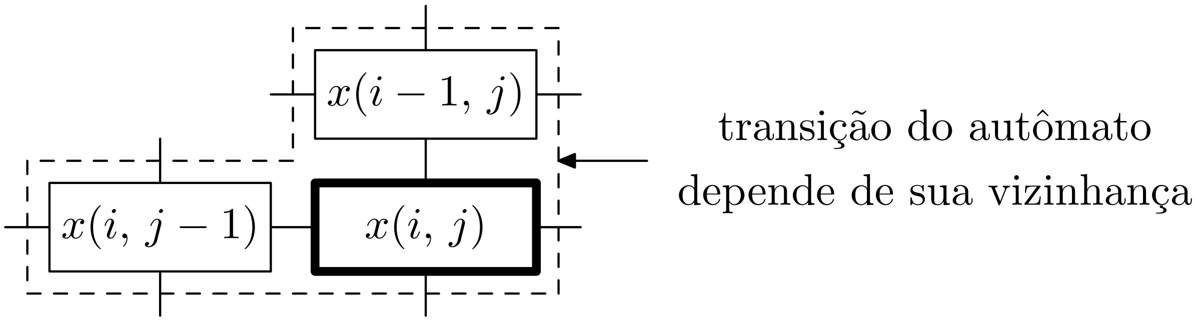
Autômatos bidimensionais

Autômato finito de 4 vias

- Blum e Hewitt (1967);
- generaliza o autômato finito de 2 vias;
- controle move-se para esquerda, direita, cima e baixo.

Mosaico de autômatos

- Inoue e Nakamura (1977);
- tipo de autômato celular.



Sistema de ladrilhos

- Giammarresi e Restivo (1991);
- projeção de linguagem local bidimensional.

Uma **linguagem local bidimensional** é definida a partir de um conjunto finito Θ de ladrilhos (figuras de tamanho $(2,2)$) permitidos.

Exemplo:

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline \# & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 1 \\ \hline \# & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 0 \\ \hline \# & 0 \\ \hline\end{array}, \\[2ex]
\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline 1 & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \# \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \\[2ex]
\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}
\end{array} \right\}$$

Sistema de dominós

- Latteux e Simplot (1994);
- projeção de linguagem hv-local bidimensional.

Uma **linguagem hv-local bidimensional** é definida a partir de um conjunto finito Δ de dominós (figuras de tamanho $(2,1)$ ou $(1,2)$) permitidos.

Exemplo:

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l}
\begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \\[2ex]
\begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \\[2ex]
\begin{array}{|c|c|}\hline \# & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \# \\ \hline\end{array}
\end{array} \right\}$$

Relacionando as abordagens

Definem a mesma família de linguagens bidimensionais

- projeções de expressões regulares;
- sistemas de ladrilhos;
- sistemas de dominós;
- mosaicos de autômatos.

Essas linguagens são chamadas de linguagens bidimensionais reconhecíveis.

Fim da primeira parte

Perguntas?

Segunda parte

Desafios

- reunir e estudar artigos;
- organizar o tempo.

Frustrações

- ausência de implementação;
- falta de tempo.

Disciplinas mais relevantes

- MAC414 - Linguagens formais e autômatos;
- MAC436 - Tópicos de matemática discreta;
- MAC450 - Algoritmos de aproximação;
- MAC335 - Leitura dramática.

Fim

Obrigado!