

MAC499

Trabalho de Formatura Supervisionado

Iniciação Científica: Linguagens Bidimensionais Reconhecíveis

Fabiano Mitsuo Sato
Orientadora: Profa. Nami Kobayashi

Dezembro de 2004

Esta monografia é parte da disciplina *MAC499 - Trabalho de Formatura Supervisionado* e está dividida em duas partes: a primeira descreve o trabalho desenvolvido durante a iniciação científica e a segunda relata toda a parte subjetiva do trabalho, como experiências, desafios e frustrações.

1 A iniciação científica

O trabalho de iniciação científica começou em junho de 2004 e é orientado pela professora Nami Kobayashi. Nós estudamos algumas propriedades de famílias de linguagens bidimensionais. Trata-se de um tópico da **Teoria de Autômatos e Linguagens Formais**.

2 Introdução

Muitos modelos para generalizar os conceitos e técnicas da Teoria de Autômatos e Linguagens Formais para duas dimensões têm sido estudados. Motivados inicialmente por problemas relacionados a reconhecimento de padrões e processamento de imagens, esses modelos também são interessantes em estudos sobre autômatos celulares e modelos de computação paralela. Em tal estudo, cuidou-se para que as generalizações parecessem naturais, coincidissem com as teorias existentes quando restritas a uma dimensão e herdassem o maior número possível de propriedades conhecidas.

3 Objetivos do estudo

Nosso objetivo na iniciação científica foi estudar os diferentes modelos existentes na literatura para definir ou reconhecer figuras bidimensionais, bem como relacionar as classes de linguagens definidas ou reconhecidas por tais modelos.

4 Metodologia

Inicialmente, diversos artigos com algum conteúdo relacionado ao tema foram selecionados e lidos. Formada uma base de conhecimento, escolhemos aqueles que melhor correspondiam à nossa proposta de trabalho para um estudo mais cuidadoso e pesquisamos outros que eram citados pelos artigos principais.

Durante os últimos meses, fizemos reuniões semanais em que discutimos os artigos estudados.

5 Tópicos estudados

Nesta seção, apresentaremos os principais tópicos estudados durante a iniciação científica. Nossa referência principal é o texto de D. Giammarresi e A. Restivo[4], o mais abrangente e completo entre os mencionados nas Referências no final desta seção.

5.1 Figuras e linguagens

Uma *figura* (*picture*) ou palavra bidimensional é definida como uma matriz de símbolos de um alfabeto finito.

Seja p uma figura. Denotamos por

- $l_1(p)$ o número de linhas de p ;
- $l_2(p)$ o número de colunas de p ;
- $(l_1(p), l_2(p))$ o tamanho de p ;
- $p(i, j)$ o símbolo de p na linha i e coluna j .

A figura vazia, denotada por λ , é a figura cujo número de linhas e de colunas é zero.

Exemplo 1. Seja p a figura de tamanho $(5, 5)$ sobre $\Sigma = \{0, 1\}$, com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições.

$$p = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad e$$

$$\begin{aligned}
l_1(p) &= l_2(p) = 5; \\
p(i, i) &= 1 \text{ para todo } 1 \leq i \leq 5; \\
p(i, j) &= 0 \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq 5 \text{ tal que } i \neq j.
\end{aligned}$$

Uma *linguagem bidimensional* é um conjunto de figuras. O conjunto de todas as figuras sobre um alfabeto Σ é denotado por Σ^{**} .

Exemplo 2. A linguagem L de todas as figuras não-vazias sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que são quadrados com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições pode ser descrita por

$$L = \{p \in \Sigma^{**} \mid l_1(p) = l_2(p) > 0, p(i, i) = 1 \text{ e } p(i, j) = 0 \text{ para todo } i \neq j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq l_1(p)\}.$$

Para facilitar a identificação da região e dos limites de uma figura p de tamanho (m, n) sobre um alfabeto finito Σ e facilitar futuras descrições de estratégias de leitura, usamos um símbolo especial $\# \notin \Sigma$ para envolver a figura p . A nova figura, denotada por \hat{p} , tem tamanho $(m + 2, n + 2)$.

5.2 Operações

Sejam p e q duas figuras de tamanho (m, n) e (m', n') , com $m, n, m', n' > 0$, sobre um alfabeto Σ .

$$p = \begin{array}{|ccc|} \hline p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} \\ \hline \end{array} \qquad q = \begin{array}{|ccc|} \hline q_{11} & \cdots & q_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m'1} & \cdots & q_{m'n'} \\ \hline \end{array}$$

A concatenação por coluna de p e q é uma operação que une lateralmente as figuras p e q , dispondo a primeira coluna de q ao lado da última coluna de p . Essa operação, denotada por $p \oplus q$, está definida apenas se p e q tiverem o mesmo número de linhas. A figura vazia λ é o elemento neutro dessa operação.

$$p \oplus q = \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline p_{11} & \cdots & p_{1n} & q_{11} & \cdots & q_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mn} & q_{m'1} & \cdots & q_{m'n'} \\ \hline \end{array}$$

Analogamente, a concatenação por linha de p e q é uma operação que une verticalmente as figuras p e q , dispondo a primeira linha de q abaixo da última linha de p . Essa operação, denotada por $p \ominus q$, está definida apenas se p e q tiverem o mesmo número de colunas. A figura vazia λ é o elemento neutro dessa operação.

$$p \oplus q = \begin{array}{|c|c|c|} \hline p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline p_{m1} & \cdots & p_{mn} \\ \hline q_{11} & \cdots & q_{1n'} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline q_{m'1} & \cdots & q_{m'n'} \\ \hline \end{array}$$

Essas operações de concatenação, inicialmente definidas para figuras, podem ser estendidas para linguagens bidimensionais.

Sejam L_1 e L_2 duas linguagens sobre um alfabeto finito Σ . A concatenação por coluna de L_1 e L_2 , denotada por $L_1 \oplus L_2$, é definida por

$$L_1 \oplus L_2 = \{p \oplus q \mid p \in L_1 \text{ e } q \in L_2\}.$$

Analogamente, a concatenação por linha de L_1 e L_2 , denotada por $L_1 \ominus L_2$, é definida por

$$L_1 \ominus L_2 = \{p \ominus q \mid p \in L_1 \text{ e } q \in L_2\}.$$

Iterando as operações de concatenação, podemos definir os *fechos transitivos e reflexivos* das concatenações, uma espécie de “estrela de Kleene” para duas dimensões.

Seja L uma linguagem bidimensional. O fecho transitivo e reflexivo da concatenação por coluna de L , denotado por $L^{*\oplus}$ é definido por

$$L^{*\oplus} = \bigcup_{i \geq 0} L^{i\oplus},$$

onde $L^{0\oplus} = \lambda$, $L^{1\oplus} = L$ e $L^{n\oplus} = L \oplus L^{(n-1)\oplus}$.

Analogamente, o fecho transitivo e reflexivo da concatenação por linha de L , denotado por $L^{*\ominus}$ é definido por

$$L^{*\ominus} = \bigcup_{i \geq 0} L^{i\ominus},$$

onde $L^{0\ominus} = \lambda$, $L^{1\ominus} = L$ e $L^{n\ominus} = L \ominus L^{(n-1)\ominus}$.

Exemplo 3. Seja L_l a linguagem sobre um alfabeto finito Σ de figuras formadas por uma única linha, mais de uma coluna e cujo primeiro símbolo é igual ao último. Usando a notação de linguagens unidimensionais,

$$L_l = \{x \in \Sigma^* \mid x = aua, a \in \Sigma \text{ e } u \in \Sigma^*\}.$$

A linguagem L das figuras sobre Σ com mais de uma coluna e cuja primeira coluna é igual à última pode ser obtida por

$$L = L_l^{*\ominus} \setminus \{\lambda\}.$$

5.3 Projeções

Uma projeção é uma função de um alfabeto finito em outro alfabeto finito.

Uma projeção $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ pode ser naturalmente estendida para figuras e linguagens.

Exemplo 4. Sejam $\Gamma = \{0, 1\}$ e $\Sigma = \{a\}$ alfabetos e considere a projeção π tal que $\pi(0) = \pi(1) = a$.

$$p = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad \pi(p) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline a & a & a \\ \hline \end{array}$$

Se L é a linguagem de todas as figuras sobre Γ que são quadrados com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições, então $\pi(L)$ é a linguagem de todas as figuras sobre Σ que são quadrados.

5.4 Expressões regulares

Famílias maiores de linguagens bidimensionais podem ser obtidas aplicando as operações introduzidas a linguagens bidimensionais elementares, da mesma maneira como é feito para linguagens unidimensionais (de *strings*).

Dado um alfabeto finito Σ , chamamos de *linguagens bidimensionais atômicas* sobre Σ a linguagem vazia \emptyset e toda linguagem $\{\boxed{a}\}$, com $a \in \Sigma$.

Seja

$$\mathcal{R} = \{\ominus, \oplus, * \ominus, * \oplus, \cup, \cap\}$$

o conjunto de operações que serão chamadas de *operações regulares*. Uma linguagem bidimensional sobre Σ é regular se puder ser obtida de linguagens bidimensionais atômicas pela aplicação de um número finito de operações regulares.

Definição 1. Uma expressão regular sobre um alfabeto finito Σ é definida recursivamente por:

- (i) \emptyset e toda letra $a \in \Sigma$ são expressões regulares.
- (ii) Se α e β são expressões regulares, então $(\alpha) \cup (\beta)$, $(\alpha) \cap (\beta)$, $(\alpha) \oplus (\beta)$, $(\alpha) \ominus (\beta)$, $(\alpha)^{* \oplus}$, $(\alpha)^{* \ominus}$ são expressões regulares.

Exemplo 5. A linguagem L das figuras sobre $\Gamma = \{0, 1, 2\}$, que são quadrados com 1 na diagonal principal, 2 em todas as posições abaixo da diagonal principal e 0 em todas as posições acima da diagonal principal, é regular.

Considere as linguagens L_l das figuras sobre Γ que são linhas contendo um número qualquer de 2s, seguido por exatamente um 1, seguido por um número qualquer de 0s, e L_c das figuras sobre Γ que são colunas contendo um número qualquer de 0s, seguido por exatamente um 1, seguido por um número qualquer de 2s.

$$\underbrace{\boxed{2 \ \dots \ 2}}_{\geq 0 \text{ repeti\c{c}oes}} \ \boxed{1} \ \underbrace{\boxed{0 \ \dots \ 0}}_{\geq 0 \text{ repeti\c{c}oes}} \quad L_l = L(2^{*\oplus} \oplus 1 \oplus 0^{*\oplus})$$

$$\begin{array}{c} \boxed{0} \\ \boxed{\dots} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{\dots} \\ \boxed{2} \end{array} \left. \begin{array}{l} \geq 0 \text{ repeti\c{c}oes} \\ \geq 0 \text{ repeti\c{c}oes} \end{array} \right\} \quad L_c = L(0^{*\ominus} \ominus 1 \ominus 2^{*\ominus})$$

$L = L_l^{*\ominus} \cap L_c^{*\oplus}$ pode ser descrita pela seguinte express\~ao regular:

$$(2^{*\oplus} \oplus 1 \oplus 0^{*\oplus})^{*\ominus} \cap (0^{*\ominus} \ominus 1 \ominus 2^{*\ominus})^{*\oplus}.$$

A fam\~ilia das linguagens que s\~ao proje\c{c}o de linguagens regulares \e denotada por $\mathcal{L}(\text{PRE})$.

Exemplo 6. Considere o alfabeto Γ e a linguagem L do exemplo anterior. A linguagem L' de todas as figuras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ que s\~ao quadradros com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posi\c{c}oes pode ser obtida pela aplica\c{c}o da proje\c{c}o $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$, tal que $\pi(0) = \pi(2) = 0$ e $\pi(1) = 1$, \a linguagem L , isto \e, $L' = \pi(L)$.

5.5 Aut\~omatos bidimensionais

Um aut\~omato bidimensional \e uma m\~aquina de estados capaz de ler uma fita bidimensional e aceitar ou rejeitar seu conte\~udo.

Na discuss\~ao que se segue, suporemos que os aut\~omatos bidimensionais sempre l\eam uma fita contendo uma figura com borda.

5.5.1 Aut\~omato finito de quatro vias

Em 1967, M. Blum e C. Hewitt[1] apresentaram a primeira generaliza\c{c}o de um aut\~omato finito para duas dimens\~oes: o *aut\~omato finito de quatro vias* (*4FA*).

O modelo introduzido estende naturalmente um *aut\~omato finito de duas vias*. Nesse modelo, a cada transi\c{c}o, o “controle de leitura”¹ pode movimentar-se sobre a fita em uma das quatro dire\c{c}oes: *esquerda* (\leftarrow), *direita* (\rightarrow), *cima* (\uparrow) e *baixo* (\downarrow).

¹O controle de leitura \e uma esp\ecie de indicador de posi\c{c}o na fita do aut\~omato. No caso de aut\~omatos bidimensionais, podemos imaginar que o controle \e um par de inteiros que representa uma posi\c{c}o na fita bidimensional.

Definição 2. Um autômato finito determinístico de quatro vias, denotado por $4DFA$, é uma 7-tupla $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \Delta, q_0, q_a, q_r, \delta)$ onde

- Σ é o alfabeto de entrada;
- Q é um conjunto finito de estados;
- $\Delta = \{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$ é o conjunto de direções permitidas para o movimento do controle de leitura;
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial;
- $q_a \in Q$ é o estado de aceitação;
- $q_r \in Q$ é o estado de rejeição;
- $\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Sigma \rightarrow Q \times \Delta$ é a função de transição.

Um autômato finito não-determinístico de quatro vias, denotado por $4NFA$, é semelhante a um $4DFA$, com exceção da função de transição, que é definida por

$$\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Sigma \rightarrow 2^{Q \times \Delta}.$$

Inicialmente, um 4FA assume o estado inicial q_0 e seu controle de leitura é posicionado sobre o símbolo na primeira linha e primeira coluna da figura existente na fita. Em cada transição, o autômato lê o símbolo da fita indicado pelo controle de leitura e determina seu próximo estado e a direção para qual o controle deve mover-se se o 4FA for determinístico, ou determina um conjunto de estados e direções se o 4FA for não-determinístico. Quando o 4FA atinge o estado q_a ou q_r , ele pára, aceitando ou rejeitando a figura, respectivamente.

O controle de leitura deve estar sempre sobre um símbolo da figura. Para garantir isso, assumimos que, quando ele está sobre um símbolo da borda #, seu próximo movimento leva-o de volta a um símbolo da figura.

Exemplo 7. Seja L a linguagem de todas as figuras sobre o alfabeto $\Sigma = \{\diamond, \heartsuit\}$ que possuem uma ou mais colunas e cuja primeira coluna é idêntica à última.

L é aceita pelo $4DFA$ $\mathcal{A} = \{\Sigma, Q, \Delta, q_0, q_a, q_r, \delta\}$, com

- $Q = \{q_0, q_a, q_r, q_\diamond, q_\heartsuit, q_{\diamond'}, q_{\heartsuit'}, q_b, q_e\}$;
- $\Delta = \{\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow\}$;
- $\delta : Q \setminus \{q_a, q_r\} \times \Sigma \rightarrow Q \times \Delta$ definida por:

1. $\delta(q_0, \diamond) = (q_\diamond, \rightarrow)$ e $\delta(q_0, \heartsuit) = (q_\heartsuit, \rightarrow)$.

No estado inicial, “memoriza” o símbolo que é indicado pelo controle de leitura (que está sobre a primeira coluna) e começa a procurar a última coluna da figura, movendo-se para direita e sem mudar de linha.

2. $\delta(q_\diamond, \sigma) = (q_\diamond, \rightarrow)$ e $\delta(q_\heartsuit, \sigma) = (q_\heartsuit, \rightarrow), \forall \sigma \in \Sigma$.

Enquanto não achar a borda da direita da figura, continua movendo-se para direita, sem deixar a linha atual.

3. $\delta(q_{\diamond}, \#) = (q_{\diamond'}, \leftarrow)$ e $\delta(q_{\heartsuit}, \#) = (q_{\heartsuit'}, \leftarrow)$.
Quando atingir a borda da direita da figura, estará exatamente uma posição à direita da última coluna da figura. Então realiza um movimento para esquerda.
4. $\delta(q_{\diamond'}, \diamond) = (q_e, \leftarrow)$ e $\delta(q_{\heartsuit'}, \heartsuit) = (q_e, \leftarrow)$.
Na última coluna, confere se o símbolo memorizado coincide com o símbolo indicado pelo controle de leitura. Se forem iguais, começa o movimento de volta para a primeira coluna, movendo-se para esquerda e sem mudar de linha.
5. $\delta(q_{\diamond'}, \heartsuit) = (q_r, \leftarrow)$ e $\delta(q_{\heartsuit'}, \diamond) = (q_r, \leftarrow)$.
Caso o símbolo memorizado seja diferente do símbolo indicado pelo controle de leitura, a figura deverá ser rejeitada.
6. $\delta(q_e, \sigma) = (q_e, \leftarrow)$, $\forall \sigma \in \Sigma$.
Enquanto não achar a borda da esquerda da figura, continua movendo-se para esquerda, sem deixar a linha atual.
7. $\delta(q_e, \#) = (q_b, \rightarrow)$.
Quando atingir a borda da esquerda da figura, estará exatamente uma posição à esquerda da primeira coluna da figura. Então realiza um movimento para direita.
8. $\delta(q_b, \sigma) = (q_0, \downarrow)$, $\forall \sigma \in \Sigma$.
Depois de voltar para a primeira coluna, deve começar um novo ciclo para o primeiro símbolo da próxima linha. Então realiza um movimento para baixo.
9. $\delta(q_0, \#) = (q_a, \uparrow)$.
Se procurando uma próxima linha, encontrar a borda de baixo da figura, o 4DFA pára e a figura é aceita.

A família das linguagens aceitas por 4DFA é denotada por $\mathcal{L}(4DFA)$. Analogamente, a família das linguagens aceitas por 4NFA é denotada por $\mathcal{L}(4NFA)$.

Comparando essas famílias, obtemos um resultado diferente do existente para linguagens unidimensionais.

Teorema 1. *A família das linguagens aceitas por 4DFA está propriamente contida na família das linguagens aceitas por 4NFA, isto é,*

$$\mathcal{L}(4DFA) \subsetneq \mathcal{L}(4NFA).$$

Exemplo 8. Considere a linguagem das figuras sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ que são quadrados de tamanho ímpar e cujo símbolo na posição central da figura é 1.

Enquanto um 4NFA pode descobrir não-deterministicamente se uma figura é um quadrado e determinar sua posição central, um 4DFA não consegue sequer encontrar a posição central de uma figura qualquer.

5.5.2 Mosaico de autômatos (*On-line tessellation automaton*)

Introduzido por K. Inoue e A. Nakamura[5] em 1977, o *mosaico de autômatos* (*2OTA*) é um autômato celular que consiste em uma matriz “infinita” de autômatos finitos idênticos e uma fita bidimensional.

Cada símbolo da fita é associado a exatamente um autômato, de forma que o símbolo na posição (i, j) da figura p existente na fita possa ser lido apenas pelo autômato na posição (i, j) . Por simplicidade, suporemos que a borda de p é associada aos autômatos da matriz que estão em volta daqueles que foram associados a um símbolo da figura, formando uma “borda” de autômatos.

Definição 3. Um mosaico de autômatos determinístico, denotado por *2DOTA*, é definido por $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$, onde

- Σ é o alfabeto de entrada;
- Q é um conjunto finito de estados;
- $I \subseteq Q$ é o conjunto de estados iniciais;
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de estados finais;
- $\delta : Q \times Q \times \Sigma \rightarrow Q$ é a função de transição.

Um mosaico de autômatos não-determinístico, denotado por *2NOTA*, é semelhante a um *2DOTA*, com exceção da função de transição, que é definida por

$$\delta : Q \times Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q.$$

Um *2OTA* opera em $l_1(p) + l_2(p)$ passos seqüenciais. Inicialmente, no tempo $t = 0$, cada autômato da borda assume um estado inicial de I . Em seguida, quando $t = 1$, o autômato na posição $(1, 1)$ realiza sua transição considerando os estados dos autômatos da vizinhança formada pelos autômatos acima e à esquerda dele e o símbolo da fita associado a ele. Quando $t = 2$, realizam a transição simultaneamente os autômatos nas posições $(1, 2)$ e $(2, 1)$ e, quando $t = 3$, realizam a transição simultaneamente os autômatos nas posições $(1, 3)$, $(2, 2)$ e $(3, 1)$.

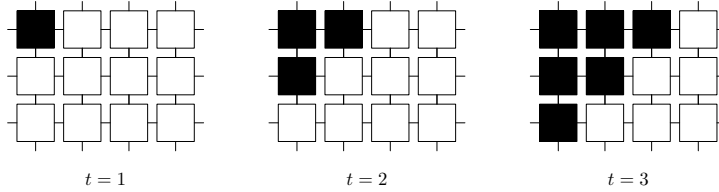


Figura 1: Comportamento do autômato de mosaicos. Os autômatos pintados já realizaram sua transição.

De forma geral, se p é a figura presente na fita, a transição do autômato na posição (i, j) , com $1 \leq i \leq l_1(p)$ e $1 \leq j \leq l_2(p)$, ocorre quando $t = i + j - 1$ e depende dos estados dos autômatos da vizinhança formada pelos autômatos nas posições $(i - 1, j)$ e $(i, j - 1)$ e do símbolo $p(i, j)$.

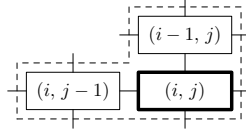


Figura 2: Autômato na posição (i, j) (destacado) e a vizinhança considerada em sua transição.

Um 2OTA aceita uma figura p se o autômato na posição $(l_1(p), l_2(p))$ assume algum estado final de F ao final de alguma execução do mosaico.

Exemplo 9. Seja L_i a linguagem de todas as figuras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a\}$ que possuem um número ímpar de colunas.

L_i é aceita pelo 2DOTA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, I, F, \delta)$, com

- $Q = \{q_0, q_p, q_i\}$;
- $I = \{q_0\}$;
- $F = \{q_i\}$;
- $\delta : Q \times Q \times \Sigma \rightarrow Q$ definida por:

1. $\delta(q_0, q_0, a) = q_i$.

Como os autômatos acima e à esquerda na matriz estão no estado inicial q_0 , o autômato está na posição $(1, 1)$ e, por isso, está associado a um símbolo de uma coluna ímpar; mais especificamente, da primeira coluna.

2. $\delta(q_0, q_p, a) = q_i$ e $\delta(q_0, q_i, a) = q_p$.

Se, na matriz, o autômato fica abaixo de outro que está no estado inicial q_0 , ele está associado a um símbolo da primeira linha da figura. A paridade da coluna em que se encontra depende de seu vizinho à esquerda, isto é, se seu vizinho “pertencer” a uma coluna ímpar, o autômato está em uma coluna par e vice-versa.

3. $\delta(q_i, q_0, a) = q_i$.

Se, na matriz, o autômato fica à direita de outro que está no estado inicial q_0 , ele está associado a um símbolo da primeira coluna da figura e seu vizinho de cima deve estar no estado q_i .

4. $\delta(q_i, q_p, a) = q_i$ e $\delta(q_p, q_i, a) = q_p$.

Se, na matriz, o autômato fica abaixo de outro que não está no estado inicial, a coluna a qual o autômato “pertence” está definida e é a mesma a qual o autômato de cima “pertence”.

A família das linguagens aceitas por 2DOTA é denotada por $\mathcal{L}(2DOTA)$. Analogamente, a família das linguagens aceitas por 2NOTA é denotada por $\mathcal{L}(2NOTA)$.

Teorema 2. *A família das linguagens aceitas por 2DOTA está propriamente contida na família das linguagens aceitas por 2NOTA, isto é,*

$$\mathcal{L}(2DOTA) \subsetneq \mathcal{L}(2NOTA).$$

Teorema 3. *A família das linguagens aceitas por 4NFA está propriamente contida na família das linguagens aceitas por 2NOTA, isto é,*

$$\mathcal{L}(4NFA) \subsetneq \mathcal{L}(2NOTA).$$

5.6 Sistema de ladrilhos (*Tiling system*)

Em 1991, D. Giammarresi e A. Restivo[3] introduziram uma nova caracterização de linguagens bidimensionais reconhecíveis. Nessa caracterização, uma linguagem bidimensional é reconhecível se for projeção de alguma linguagem local bidimensional.

5.6.1 Linguagens locais bidimensionais

A definição de linguagens locais bidimensionais é uma generalização da definição de linguagens locais dada por S. Eilenberg[2]. Como o nome indica, ela procura explorar as propriedades locais de uma dada linguagem bidimensional. Isso é feito definindo um conjunto de todas as subfiguras que podem ocorrer nas figuras pertencentes a essa linguagem.

Definição 4. *Sejam p uma figura e h e k inteiros positivos tais que $h \leq l_1(p)$ e $k \leq l_2(p)$. O conjunto das subfiguras de tamanho (h, k) existentes em p é chamado de conjunto dos blocos de p de tamanho (h, k) e denotado por $B_{h,k}(p)$.*

No caso das linguagens locais bidimensionais, as subfiguras consideradas têm tamanho $(2, 2)$ e são chamadas de **ladrilhos** (*tiles*).

Definição 5. *Seja Γ um alfabeto finito. Uma linguagem bidimensional $L \subseteq \Gamma^{**}$ é local se existe um conjunto finito Θ de ladrilhos sobre o alfabeto $\Gamma \cup \{\#\}$ tal que $L = \{p \in \Gamma^{**} \mid B_{2,2}(\hat{p}) \subseteq \Theta\}$.*

Exemplo 10. Sejam $\Gamma = \{0, 1\}$ um alfabeto e Θ o seguinte conjunto de ladrilhos sobre $\Gamma \cup \{\#\}$:

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline \# & \# \\ \hline \# & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & \# \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & \# \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & 1 \\ \hline \# & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & 0 \\ \hline \# & 0 \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & \# \\ \hline 1 & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \# & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \# \\ \hline \# & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \# & \# \\ \hline \end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \right\}$$

A linguagem $L' = L(\Theta)$ é uma linguagem local composta pelas figuras sobre Γ que são quadrados com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições.

A família das linguagens locais bidimensionais é denotada por LOC.

Definição 6. Um sistema de ladrilhos (TS) é uma 4-tupla $\mathcal{T} = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi)$, onde Σ e Γ são alfabetos finitos, Θ é um conjunto finito de ladrilhos sobre $\Gamma \cup \{\#\}$ e $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ é uma projeção.

Um sistema de ladrilhos $\mathcal{T} = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi)$ define uma linguagem $L = L(\mathcal{T})$ sobre Σ se $L = \pi(L')$, onde L' é a linguagem local bidimensional definida por $L(\Theta)$.

Exemplo 11. Considere o alfabeto Γ e o conjunto Θ do exemplo anterior. A linguagem L de todas as figuras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a\}$ que são quadrados pode ser definida pelo sistema de ladrilhos $\mathcal{T} = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi)$, onde $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ é a projeção definida por $\pi(0) = \pi(1) = a$.

A família das linguagens definidas por TS é denotada por $\mathcal{L}(\text{TS})$.

Teorema 4. A família das linguagens locais bidimensionais está propriamente contida na família das linguagens definidas por TS, isto é,

$$\text{LOC} \subsetneq \mathcal{L}(\text{TS}).$$

5.7 Sistema de dominós (*Domino system*)

Em 1994, M. Latteux e D. Simplot[6] introduziram um modelo semelhante ao sistema de ladrilhos. A diferença estava no conjunto de subfiguras permitidas para sua linguagem local bidimensional.

5.7.1 Linguagens hv-locais bidimensionais

As linguagens hv-locais bidimensionais são definidas por um conjunto finito de dominós, subfiguras de tamanho $(2, 1)$ e $(1, 2)$, que podem ocorrer em uma figura pertencente à linguagem.

Definição 7. Seja Γ um alfabeto finito. Uma linguagem bidimensional $L \subseteq \Gamma^{**}$ é hv-local se existe um conjunto finito Δ de dominós sobre o alfabeto $\Gamma \cup \{\#\}$ tal que $L = \{p \in \Gamma^{**} \mid (B_{1,2}(\hat{p}) \cup B_{2,1}(\hat{p})) \subseteq \Delta\}$.

Exemplo 12. Sejam $\Gamma = \{0, 1\}$ um alfabeto e Δ o seguinte conjunto de dominós sobre $\Gamma \cup \{\#\}$:

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \# & \# & \# & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ \hline \# & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & \# & \# \\ \hline \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \# & \# & \# & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \# \\ \hline \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \# & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & \# \\ \hline \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

A linguagem $L = L(\Delta)$ é uma linguagem hv-local composta pelas figuras sobre Γ que são quadrados com 1 na diagonal principal, 2 em todas as posições abaixo da diagonal principal e 0 em todas as posições acima da diagonal principal.

Definição 8. *Um sistema de dominós (DS) é uma 4-tupla $\mathcal{D} = (\Sigma, \Gamma, \Delta, \pi)$, onde Σ e Γ são alfabetos finitos, Δ é um conjunto finito de dominós sobre $\Gamma \cup \{\#\}$ e $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ é uma projeção.*

Exemplo 13. Considere o alfabeto Γ e o conjunto Δ do exemplo anterior. A linguagem de todas as figuras sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ que são quadrados com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições pode ser definida pelo sistema de dominós $\mathcal{D} = (\Sigma, \Gamma, \Delta, \pi)$, onde $\pi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ é a projeção definida por $\pi(0) = \pi(2) = 0$ e $\pi(1) = 1$.

A família das linguagens definidas por DS é denotada por $\mathcal{L}(\text{DS})$.

5.8 Relacionamento entre as abordagens

Cada uma das abordagens mencionadas de linguagens bidimensionais parte da generalização de diferentes caracterizações de linguagens reconhecíveis unidimensionais. Como apontado anteriormente, a família das linguagens aceitas por 4NFA é um conjunto próprio da família das linguagens aceitas por 2NOTA, isto é, o autômato finito de quatro vias é menos poderoso que o mosaico de autômatos em termos de capacidade de reconhecimento.

Resta saber qual a relação entre as demais famílias.

Teorema 5. *Projeções de linguagens regulares, mosaicos de autômatos, sistemas de ladrilhos e sistemas de dominós definem a mesma família de linguagens bidimensionais, isto é,*

$$\mathcal{L}(\text{PRE}) = \mathcal{L}(\text{2NOTA}) = \mathcal{L}(\text{TS}) = \mathcal{L}(\text{DS}).$$

Observação. No enunciado do teorema acima, estamos supondo que as linguagens consideradas não incluem a figura vazia.

Referências

- [1] M. Blum and C. Hewitt. *Automata on a Two-Dimensional Tape*. 8th IEEE Symposium on Switching Automata Theory (1967) 155-160.
- [2] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines*, Vol. A, Academic Press, 1974.
- [3] D. Giammarresi and A. Restivo. *Recognizable Picture Languages*. International Journal Pattern Recognition and Artificial Intelligence 6 (2-3) (1992) 241-256.

- [4] D. Giammarresi and A. Restivo. *Two-Dimensional Languages*. Handbook of Formal Languages. G. Rozenberg and A. Salomaa (Eds.), Springer, Vol. 3, 1997.
- [5] K. Inoue and A. Nakamura. *Some Properties of Two-Dimensional On-Line Tessellation Acceptors*. Information Sciences 13 (1977) 95-121.
- [6] M. Latteux and D. Simplot. *Recognizable Picture Languages and Domino Tiling*. Theoretical Computer Science 178 (1997) 275-283.

6 Experiências acumuladas

6.1 Um pouco de história

Desde o início do terceiro ano de curso, tive a intenção de realizar uma iniciação científica. Meus objetivos eram ter uma chance de aprofundar meus conhecimentos em alguma área da Ciência da Computação e agregar experiência com o ambiente acadêmico de pesquisa.

Na minha visão utópica, esperava ser apresentado a algum tema que, repentinamente, despertasse meu interesse e que me permitisse afirmar com absoluta certeza que estudá-lo seria algo que mudaria a minha vida.

Entretanto, isso não aconteceu. Não da maneira como esperava.

Comecei então a procurar, sem critério definido, alguma oportunidade de ter contato com algo que, ainda que inicialmente desinteressante para mim, pudesse eventualmente ganhar meu interesse no futuro. Nessa época, candidatei-me a um programa de intercâmbio e não fui aprovado. Em compensação, fui aceito para um estágio com bolsa do CNPq na Escola Politécnica.

Embora tenha trabalhado lá de outubro de 2003 a julho de 2004 e ter alcançado, junto aos demais estagiários, resultados relativamente bons, decidi que não deveria “aproveitar” aquela experiência de estágio em uma disciplina de conclusão de curso.

Então, talvez por valorizar demais esta disciplina, passei algumas semanas no início do ano procurando uma solução para minha situação. Foi quando tive a impressão de saber exatamente o que queria e, iludido, comecei a fazer planos de como atingir a meta a que me propunha. Diversas razões, no entanto, levaram-me a mudar os planos.

Já atrasado para escolha de supervisor, tive grande apoio do professor Carlos Eduardo Ferreira e da professora Nami Kobayashi, que aceitou ser minha orientadora.

Escolhemos, então, estudar um assunto relativamente antigo, porém com resultados bem recentes.

6.2 Desafios e frustrações

O trabalho de iniciação científica foi, em vários aspectos, bastante desafiador.

Inicialmente, trabalhamos com quatro artigos para definir um tema mais específico para estudar e estabelecer os fundamentos necessários. Durante minhas leituras, fui percebendo que o nível de entendimento que julgaria suficiente em muitas situações era pequeno para poder começar um estudo aprofundado, o que exigiu de mim mais dedicação e atenção, inclusive para conciliar as diferentes definições dadas para um mesmo objeto de estudo e notar os erros existentes nos textos.

Além disso, os artigos deixavam vários detalhes como referências a outros trabalhos publicados. Desse modo, o uso das referências, algo que praticamente ignorava no início do estudo, passou a ter grande importância para mim.

Definido o tema geral, comecei a pesquisar trabalhos relacionados até que houve um momento em que o número de possibilidades tornou-se grande e o progresso horizontal. Nessa ocasião, a professora orientou-me a deixar de lado o que poderia fugir um pouco do assunto principal e concentrar novamente nos artigos principais. Enfim, os resultados do estudo puderam começar a aparecer.

Começamos a marcar reuniões semanais para discutir o andamento do estudo. Já na primeira reunião, minha capacidade de formalização de um raciocínio mostrou-se insatisfatória: deslizes em exemplos e demonstrações eram frequentemente corrigidos pela professora. A partir daí, procurei dar mais consistência a minha lógica e raciocínio.

Na produção da monografia, encontrei novo desafio. Escrever com qualidade sobre o assunto estudado, tarefa que imaginava ser simples, mostrou-se ser bastante trabalhosa. As principais dificuldades foram: a ausência de texto sobre o tema em português, de onde poderíamos usar nomenclaturas existentes; a inclusão de exemplos simples, mas não formulados nos artigos; a necessidade de não fazer apenas uma tradução do excelente texto que orientou nosso estudo.

Como frustrações, destaco inicialmente a falta de tempo. Enquanto no primeiro semestre ainda participava do grupo de estagiários no projeto do *Laboratório de Sistemas de Potência* da Escola Politécnica, no segundo semestre, cursei um número muito grande de disciplinas (mesmo não precisando) comparado a maioria de meus colegas. Como meu tempo era dividido entre diversos afazeres, o que mais pesava no meu planejamento eram os prazos; por isso, não consegui dedicar o tempo que gostaria à iniciação científica nem estudar outros artigos escolhidos.

A propósito, minha proposta inicial de trabalho relacionava uma possível implementação de uma aplicação, item que não foi cumprido. Embora os textos apontassem ligação do assunto estudado com as áreas de reconhecimento de padrões e processamento de imagens, não encontramos nenhum texto que detalhasse que tipo de contribuição havia entre as áreas.

Por fim, uma frustração minha que se aproxima da anterior está no fato de o estudo, até o momento, não ter sido compartilhado com outras pessoas. Um dos meus desejos era ter feito alguma contribuição à comunidade científica local e, talvez algo mais ambicioso, ter produzido algo útil às outras pessoas.

6.3 Disciplinas mais relevantes do BCC

Devido à natureza da iniciação científica, as disciplinas que tiveram importância direta para o trabalho são de caráter mais teórico. A seguir, relaciono aquelas que considero principais.

- **MAC414 - Linguagens formais e autômatos.** O tema estudado na iniciação científica, linguagens bidimensionais reconhecíveis, envolve diversas generalizações de conceitos e técnicas vistos nessa disciplina. Além disso, a maioria dos artigos lidos assume que o leitor tem familiaridade com o assunto.
- **MAC450 - Algoritmos de aproximação.** Uma das avaliações dessa disciplina consistiu na leitura de um artigo e a apresentação de um seminário. Assim, tive a oportunidade de estudar cuidadosamente um texto científico e preparar, junto a dois colegas, a apresentação do estudo.
- **MAC436 - Tópicos de matemática discreta.** Apesar de não ter obtido uma boa média final, aprendi algumas técnicas matemáticas importantes que foram recorrentes nas argumentações usadas nos artigos estudados durante a iniciação científica.

Outras disciplinas que considero importante mencionar são:

- **MAC335 - Leitura dramática.** As reuniões semanais tiveram grande importância no andamento da iniciação científica. Apesar de minha capacidade de comunicar e expôr idéias ser pequena, venho aprendendo bastante nessa disciplina.
- **MAC338 - Análise de algoritmos.** Apesar da ausência de implementação e de considerações formais sobre a eficiência dos autômatos bidimensionais, procurei, em alguns momentos, examinar quais resultados poderiam surgir de uma possível implementação.

Por fim, de maneira mais geral e menos relacionado ao projeto, cito disciplinas como **MAC211 - Laboratório de programação I**, **MAC242 - Laboratório de programação II** e **MAC332 - Engenharia de software** pelos projetos em grandes grupos; as disciplina de introdução **MAC110 - Introdução à computação** e **MAC122 - Princípios de desenvolvimento de algoritmos** pelo valor, digamos, sentimental e a disciplina **MAC424 - O computador na sociedade e na empresa** por proporcionar-me uma visão mais consciente do impacto do computador em nossas vidas.

6.4 Interação com a orientadora

O clima da interação com a orientadora foi sempre muito bom, um fator muito importante para mim e para a iniciação científica de forma geral.

Desde o início, quando ambos estávamos com pouco tempo disponível, tive bastante liberdade para dar à iniciação científica o ritmo que fosse adequado a

minha disponibilidade de horário. Além disso, sempre contei com a compreensão da professora em épocas de prova ou entrega de trabalhos.

Durante as reuniões e mesmo quando não marcávamos reunião, a professora recebeu-me atenciosamente em sua sala para tirar dúvidas sobre algum tópico do estudo ou ainda para discutir a direção que deveríamos seguir.

6.5 Observações finais

Tenho gostado bastante da experiência que esta iniciação científica tem me proporcionado. Ter contato com um tema interessante, estudar artigos relativamente recentes e o apoio da professora são os fatores que mais me empolgaram até então.

Lamento não ter começado a iniciação científica antes e não ter tido um tempo razoável para dedicar ao estudo dos artigos, o que impediu a exploração de outras abordagens para o assunto e mesmo um maior aprofundamento dos tópicos estudados.

Em relação ao futuro, espero continuar estudando e fazer pós-graduação. Porém, no momento, considero de grande importância adquirir experiência no mercado de trabalho, incluindo conhecer possíveis visões diferentes de mundo, e ter um tempo para poder decidir por uma área para aprofundar meus estudos.

6.6 Agradecimentos

Agradeço a minha família, a meus amigos e aos professores que me apoiaram e tornaram meus quatro anos de curso, na medida do possível, prazerosos e divertidos.