Entropia de Grafos

Cristiane M. Sato e Yoshiharu Kohayakawa (orientador)

Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo

Entropia?! De grafos?!?!

A entropia de grafos surgiu de um problema proposto por J. Körner em 1973:

- Uma fonte emite letras de um alfabeto uma após a outra. Concatenando letras, formamos palavras.
- A cada instante, a fonte emite uma letra de acordo com uma distribuição de probabilidade.
- Característica especial: nem todas as letras precisam ser mutuamente distinguíveis. Palavras são distinguíveis se tiverem letras distinguíveis em alguma posição.

Podemos construir um grafo cujos vértices são as letras do alfabeto, onde dois vértices são adjacentes se são letras distinguíveis.

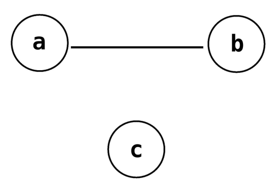

Figura 1: Um grafo de letras. Somente as letras a e b são distinguíveis.

Podemos também construir um grafo cujos vértices são todas as palavras de um certo comprimento, onde dois vértices são adjacentes se são palavras distinguíveis.

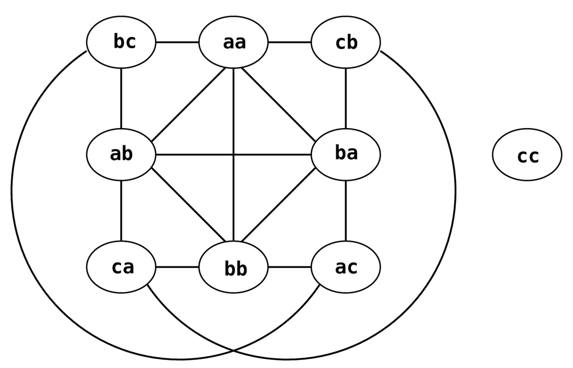

Figura 2: Grafo de palavras.

- Objetivo: codificar as palavras de um certo comprimento. Cada palavra deve receber um código binário.
- Devemos minimizar o número médio de bits por letra da palavra.
- Característica especial: palavras indistinguíveis podem receber o mesmo código.

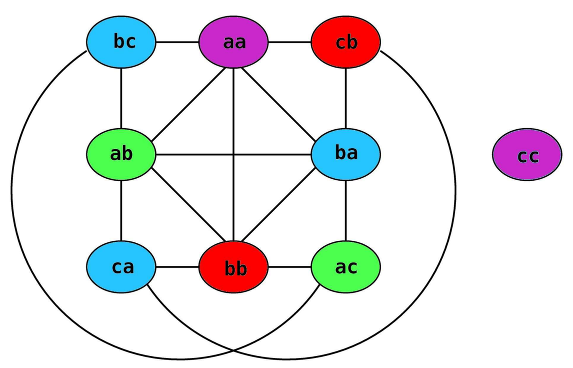

Figura 3: Cada cor representa um código binário diferente.

A entropia do grafo das letras é justamente o número médio de bits necessários por letra, dada a distribuição de probabilidade da fonte.

Poliedros

É muito difícil trabalhar com entropia de grafos usando diretamente a definição dada por Körner. Em 1990, Csiszár, Körner, Lovász, Marton e Simonyi apresentaram uma caracterização com a qual é bem mais fácil de trabalhar:

- A entropia de um grafo G é o mínimo de uma função sobre um certo poliedro relacionado a G.
- O poliedro tem dimensão igual ao número de vértices de G.
- Os vértices desse poliedro são os conjuntos estáveis (subconjuntos de vértices mutuamente não adjacentes) de G.
- Esse poliedro é chamado de politopo dos conjuntos estáveis de G.

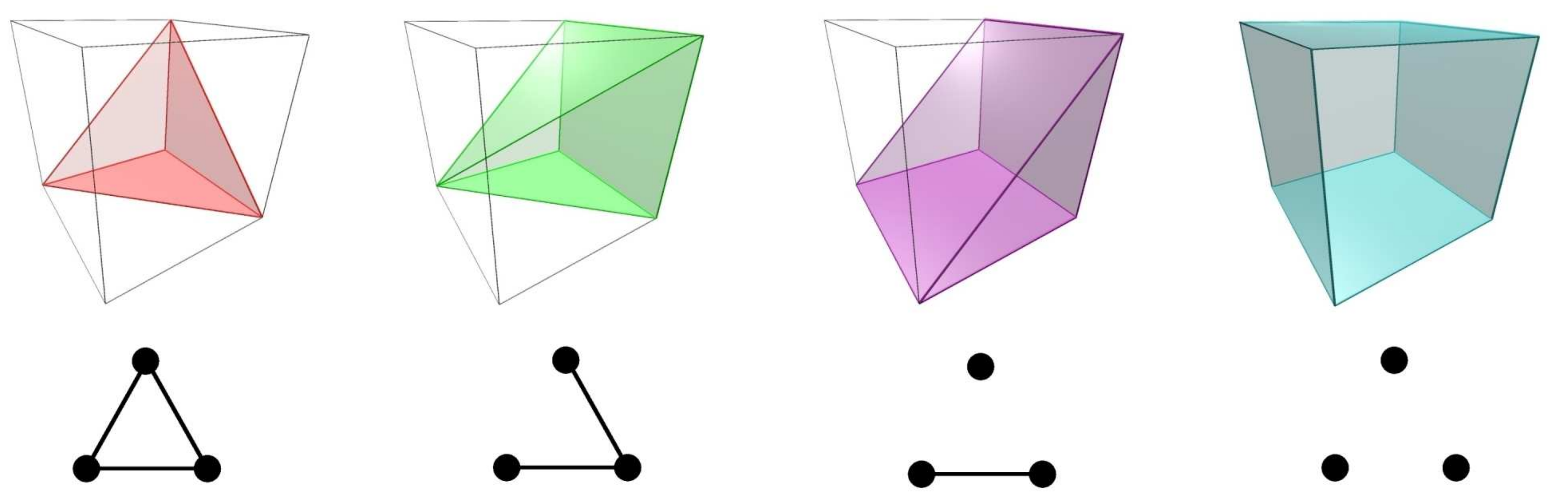

Figura 4: Grafos e seus politopos de conjuntos estáveis.

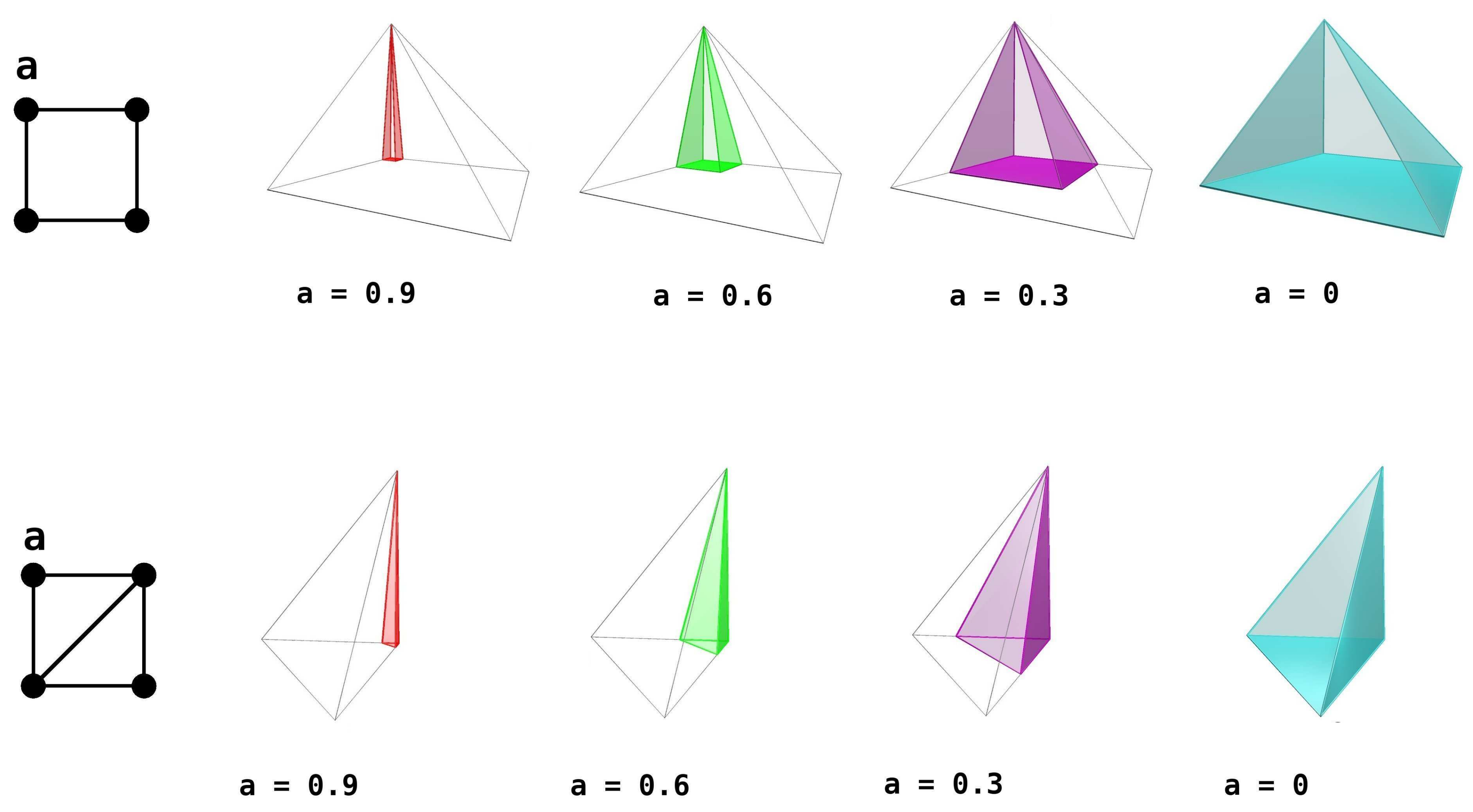

Figura 5: Fixando a coordenada relativa ao vértice a.

E daí?

Apesar de a entropia de grafos ser um assunto muito específico, já foram desenvolvidas aplicações de entropia de grafos para diversos problemas. Também foram estabelecidas muitas relações entre entropia de grafos e conceitos clássicos de Teoria de Grafos e Teoria da Informação.

Exemplo: Queremos ordenar os elementos de um conjunto de modo a minimizar o número de comparações realizadas. É claro que para isso já existem muitos algoritmos. No entanto, suponha que parte desse conjunto já está ordenada.

Como aproveitar a parte já ordenada para diminuir o número de comparações?

Kahn e Kim apresentaram uma aplicação de entropia de grafos para esse problema.

Algumas aplicações e relações:

- Grafos perfeitos: Csiszár, Körner, Lovász, Marton e Simonyi mostraram uma caracterização de grafos perfeitos através de entropia de grafos. Grafos perfeitos são uma classe muito interessante de grafos que tem sido muito estudada.
- Fórmulas booleanas: Newman, Ragde e Wigderson obtiveram limites inferiores para o tamanho de fórmulas booleanas. Radhakrishnan obteve um limite inferior para o tamanho de fórmulas booleanas que computam certas funções.
- Funções de hash: Körner e Marton, usando entropia de hipergrafos, melhoraram o limite inferior provado por Fredman e Komlós para o tamanho de famílias perfeitas de funções de hash.

Mais informações

Um texto mais completo logo estará disponível no site

`http://www.ime.usp.br/~csato/entropia`.

Contato:

`cmsato@gmail.com`,
`yoshi@ime.usp.br`.

Apoio financeiro: FAPESP. Processo número: 05/60504-6.
As imagens foram geradas usando xfig, GIMP, VMD e Raster3D.