

MAC0499 - TRABALHO DE FORMATURA SUPERVISIONADO

PROPOSTA PARA MONOGRAFIA

ENTROPIA DE GRAFOS

Aluna: Cristiane Maria Sato
Orientador: Yoshiharu Kohayakawa

PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
FINANCIADO PARCIALMENTE PELA FAPESP
PROCESSO NÚMERO 05/60504-6

RESUMO. Esta é a proposta para o trabalho de formatura da aluna Cristiane Maria Sato, supervisionado por Yoshiharu Kohayakawa. Esse projeto consiste de uma iniciação científica, cujo principal objeto de estudo é o conceito de entropia de grafos. O trabalho envolverá, portanto, o estudo de alguns tópicos da teoria da informação, probabilidade, teoria dos grafos, combinatória e otimização combinatória. Um dos objetivos do projeto é assegurar que a aluna obtenha uma formação mais profunda em matemática discreta, de modo que ela possa ingressar em um programa de pós-graduação já com uma certa preparação específica. Ao se familiarizar o suficiente com as técnicas necessárias, a aluna atacará alguns pequenos problemas específicos, objetivando obter um entendimento mais profundo da área e também tentar determinar uma linha de pesquisa para o mestrado.

1. INTRODUÇÃO

Este projeto de iniciação científica usará como literatura básica duas resenhas de G. Simonyi [15, 16]. Nelas, o conceito de entropia de grafos é introduzido e discutido. São dadas três definições equivalentes para este conceito e abordam-se aplicações bem conhecidas, dentre as quais destacamos o uso de entropia:

- (1) para um certo problema de ordenação (Kahn e Kim [5]);

- (2) para a determinação de cotas do tipo Fredman-Komlós para funções de espalhamento (*hashing*) perfeitas e sistemas separadores (Kőrnér [8] e Kőrnér e Marton [9]);
- (3) em complexidade computacional (Radhakrishnan [12, 13]).

A diversidade dos tópicos citados acima ilustra a ampla gama de aplicabilidade desse conceito em combinatória e em teoria da computação.

O projeto permitirá à aluna obter uma formação sólida em algumas áreas da matemática discreta e proporcionar-lhe-á oportunidade de pensar em alguns problemas mais específicos.

2. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVA

Um dos objetivos desse projeto é preparar a aluna na área de combinatória, dando-lhe uma formação sólida para o seu ingresso em um programa de pós-graduação. De fato, é intenção da aluna ingressar no mestrado imediatamente após a conclusão de sua graduação.

Os estudos concentram-se em um tópico específico, a saber, a entropia de grafos, mas, para a compreensão desse conceito e suas aplicações, será necessário que a aluna se familiarize com diversas áreas da combinatória. Em particular, ela terá de estudar os fundamentos da teoria da informação, alguns aspectos de probabilidade, e certos tópicos da teoria dos grafos, da combinatória extremal, da combinatória poliédrica e da complexidade computacional.

Em conclusão, justificamos esta proposta tanto pela atualidade do tópico específico de pesquisa como pela abrangência do treinamento que a aluna obterá.

3. ATIVIDADES REALIZADAS

Comecei os estudos sobre teoria da informação através de um livro de Renyi [14], interessante tanto pelo seu conteúdo quanto pelo seu formato: o livro é um diário fictício em que um aluno anota as aulas de um curso sobre teoria da informação.

Antes de passar para a resenha de Simonyi [16], estudei um artigo de Knuth [6] sobre a função θ de Lovász com o intuito de me familiarizar com alguns pré-requisitos, como por exemplo o politopo dos conjuntos estáveis. Este artigo é longo, mas muito bem escrito e me ajudou muito na compreensão de alguns detalhes dos artigos que li posteriormente.

Estudei uma das definições de entropia, suas propriedades básicas e alguns lemas muito usados em demonstrações vistas depois. Um certo “lema da substituição” é essencial para várias demonstrações do artigo sobre casais perfeitos de Kőrnér, Simonyi e Tuza [11].

Depois de me familiarizar com o conceito de entropia de grafos, estudei um artigo de Csiszár, Kórnér, Lovász e Marton [2] que apresenta uma caracterização de grafos perfeitos usando entropia e define entropia para cantos convexos. Esse foi um dos artigos mais interessantes estudados até agora, tanto pelos resultados apresentados quanto pela beleza das demonstrações.

Seguindo a ordem de referências da resenha, passei para o artigo de Kórnér, Simonyi e Tuza [11] sobre casais perfeitos e normais. Esse artigo generaliza um dos principais resultados do artigo de Csiszár, Kórnér, Lovász e Marton [2], cujos resultados, no entanto, são usados na prova da referida generalização.

Em seguida, estudei as outras definições de entropia, que, na verdade, surgiram antes da que eu tinha usado até o momento. A definição original surgiu naturalmente de um problema de teoria da informação proposto por Kórnér [7]. A segunda definição foi a mais difícil de entender. A demonstração de que ela é equivalente à original é apresentada por Kórnér [7]. Para entendê-la e trabalhar com ela, estudei os primeiros capítulos de um livro sobre teoria da informação de Cover e Thomas [1].

4. RESUMO E ESTRUTURA ESPERADA DA MONOGRAFIA

A monografia seguirá a seguinte estrutura:

- (1) Introdução
- (2) Parte técnica
 - (a) Preliminares
 - (b) Definição e propriedades básicas
 - (c) Entropia e perfeição
 - (d) Casais perfeitos e normais
 - (e) Modularidade
 - (f) Aplicações
- (3) Parte subjetiva

4.1. Definição e propriedades básicas. Apresentaremos a definição de entropia de grafos, duas caracterizações e algumas propriedades básicas.

Artigos relacionados.

- (i) Simonyi [15, 16]: resenhas sobre entropia de grafos;
- (ii) Csiszár, Kórnér, Lovász e Marton [2]: caracterização de entropia grafos.

4.2. **Entropia e perfeição.** Forneceremos uma caracterização de grafos perfeitos envolvendo entropia de grafos.

Artigos relacionados.

- (i) Csiszár, Körner, Lovász e Marton [2]: caracterização de perfeição usando entropia e cantos convexos.

4.3. **Casais perfeitos e normais.** Casais perfeitos são pares de grafos para os quais vale uma propriedade especial. Para os casais normais essa mesma propriedade também vale, porém enfraquecida. Discutiremos essa propriedade e forneceremos caracterizações para os casais.

Artigos relacionados.

- (i) Körner, Simonyi e Tuza [11]: definição e caracterização de casais perfeitos e normais.

4.4. **Modularidade.** Definiremos pares modulares, submodulares e supermodulares. Forneceremos caracterizações para esses pares.

Artigos relacionados.

- (i) Körner e Simonyi [10]: problemas de modularidade.

4.5. **Aplicações.** Apresentaremos algumas aplicações de entropia de grafos.

Artigos relacionados.

- (i) Kahn e Kim [5]: aplicações à ordenação;
- (ii) Körner [8] e Körner e Marton [9]: demonstração de cotas para funções de espalhamento perfeitas e sistemas separadores;
- (iii) Kahn [3]: estudo da transição de fase no modelo *hard-core*;
- (iv) Kahn [4]: o problema de Dedekind;
- (v) Radhakrishnan [12, 13]: demonstração de algumas cotas inferiores em teoria da complexidade computacional.

5. CRONOGRAMA DE ATIVIDADES

- **Julho:**

Terminar de redigir a monografia até a parte sobre casais perfeitos e normais.

- **Agosto a Novembro:**

Estudar os artigos necessários para finalizar a parte técnica e terminar de redigir essa parte da monografia.

- **Novembro:**

Preparar o pôster e a apresentação do trabalho.
 Escrever a parte subjetiva da monografia.
 Concluir o texto final da monografia e revisá-lo.

REFERÊNCIAS

- [1] T. M. Cover and J. A. Thomas. *Elements of information theory*. Wiley Series in Telecommunications. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991. A Wiley-Interscience Publication.
- [2] I. Csiszár, J. Körner, L. Lovász, K. Marton, and G. Simonyi. Entropy splitting for antiblocking corners and perfect graphs. *Combinatorica*, 10(1):27–40, 1990.
- [3] J. Kahn. An entropy approach to the hard-core model on bipartite graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 10(3):219–237, 2001.
- [4] J. Kahn. Entropy, independent sets and antichains: a new approach to Dedekind’s problem. 130(2):371–378 (electronic), 2002.
- [5] J. Kahn and J. H. Kim. Entropy and sorting. *J. Comput. System Sci.*, 51(3):390–399, 1995. 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Victoria, BC, 1992).
- [6] D. E. Knuth. The sandwich theorem. *Electron. J. Combin.*, 1:Article 1, approx. 48 pp. (electronic), 1994.
- [7] J. Körner. Coding of an information source having ambiguous alphabet and the entropy of graphs. In *Transactions of the Sixth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes (Tech Univ., Prague, 1971; dedicated to the memory of Antonín Špaček)*, pages 411–425. Academia, Prague, 1973.
- [8] J. Körner. Fredman-Komlós bounds and information theory. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 7(4):560–570, 1986.
- [9] J. Körner and K. Marton. New bounds for perfect hashing via information theory. *European J. Combin.*, 9(6):523–530, 1988.
- [10] J. Körner and G. Simonyi. Graph pairs and their entropies: modularity problems. *Combinatorica*, 20(2):227–240, 2000.
- [11] J. Körner, G. Simonyi, and Z. Tuza. Perfect couples of graphs. *Combinatorica*, 12(2):179–192, 1992.
- [12] J. Radhakrishnan. $\Sigma\Pi\Sigma$ threshold formulas. *Combinatorica*, 14(3):345–374, 1994.
- [13] J. Radhakrishnan. Better lower bounds for monotone threshold formulas. *J. Comput. System Sci.*, 54(2, part 1):221–226, 1997. 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (San Juan, PR, 1991).
- [14] A. Rényi. *A diary on information theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987. With a foreword by Pál Révész, Translated from the Hungarian by Zsuzsanna Makkai-Bencsáth, Reprint of the 1984 edition.
- [15] G. Simonyi. Graph entropy: a survey. In *Combinatorial optimization (New Brunswick, NJ, 1992–1993)*, volume 20 of *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, pages 399–441. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [16] G. Simonyi. Perfect graphs and graph entropy. An updated survey. In *Perfect graphs*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., pages 293–328. Wiley, Chichester, 2001.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO,
 RUA DO MATÃO 1010, 05508–900 SÃO PAULO, SP
Endereços Eletrônicos: cmsato@gmail.com, yoshi@ime.usp.br
URL: <http://www.ime.usp.br/~csato>