

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Diferenciação de Estilos no Xadrez entre
os jogadores Magnus Carlsen e Garry
Kasparov via Variação da Quantidade de
Informação dos Lances**

Gabriel Caiaffa Floriano Mendonça

**MONOGRAFIA FINAL
MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO**

Supervisor: Prof.Dr. Renato Vicente

São Paulo
2026

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Resumo

Gabriel Caiaffa Floriano Mendonça. **Diferenciação de Estilos no Xadrez entre os jogadores Magnus Carlsen e Garry Kasparov via Variação da Quantidade de Informação dos Lances.** Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2026.

Devido à sua alta complexidade combinatória e natureza determinística, o xadrez consolidou-se como um ambiente fértil para o desenvolvimento da inteligência artificial e o estudo de sistemas complexos. Contudo, embora os motores de xadrez (*engine*) modernos forneçam avaliações numéricas precisas, existe um descompasso entre a "verdade" matemática da máquina e a realidade cognitiva do enxadrista humano. Este trabalho investiga a diferenciação de estilos de jogo entre dois dos maiores campeões mundiais da história, Magnus Carlsen e Garry Kasparov, utilizando a quantização da informação de uma variação proposta por Marc Barthelemy (2025) no artigo *Chess variation entropy and engine relevance for humans*, medida em bits. Os resultados demonstram que as partidas de Magnus Carlsen apresentam uma informação média consistentemente superior à de Garry Kasparov, sugerindo que o jogo contemporâneo, auxiliado por *engines*, permite navegar por posições de maior complexidade combinatória. Através do teste estatístico Kolmogorov-Smirnov, detectou-se que as diferenças de estilo são mais acentuadas na fase de Abertura e em posições de alta incerteza ($|S| \geq 4$). Enquanto Carlsen tende a preservar a tensão e a complexidade posicional, Kasparov demonstrava preferência por simplificações táticas agudas e caminhos de cálculo mais diretos. O estudo conclui que a variação da informação é uma ferramenta eficaz para traduzir em métricas matemáticas as sutilezas estilísticas do xadrez de alto nível.

Palavras-chave: Análise de dados. Xadrez. Quantização da Informação.

Abstract

Gabriel Caiaffa Floriano Mendonça. . Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2026.

Due to its high combinatorial complexity and deterministic nature, chess has established itself as a fertile environment for the development of artificial intelligence and the study of complex systems. However, although modern engines provide precise numerical evaluations, there is a mismatch between the machine's mathematical "truth" and the cognitive reality of the human chess player. This work investigates the differentiation of playing styles between two of the greatest world champions in history, Magnus Carlsen and Garry Kasparov, utilizing the information entropy metric of a variation proposed by Marc Barthelemy (2025) in the paper *Chess variation entropy and engine relevance for humans*, measured in bits. The results demonstrate that Magnus Carlsen's games present a consistently higher average information entropy than those of Garry Kasparov, suggesting that contemporary play, aided by engines, allows for navigating positions of greater combinatorial complexity. Through the Kolmogorov-Smirnov statistical test, it was detected that stylistic differences are more pronounced in the Opening phase and in positions of high uncertainty ($|S| \geq 4$). While Carlsen tends to preserve tension and positional complexity, Kasparov demonstrated a preference for sharp tactical simplifications and more direct calculation paths. The study concludes that the variation of information is an effective tool for translating the stylistic subtleties of high-level chess into mathematical metrics.

Keywords: Data Analysis. Chess. Information Entropy.

Listas de símbolos

- E Pontuação gerada pelo motor de xadrez em *centipawns*
 Δ_0 Parâmetro referente a nível do jogador
 Δ Diferença entre a avaliação de dois melhores lances
 S Quantidade de informação em bits

Listas de figuras

2.1	Ilustração da árvore de decisão para o cálculo de $P(n)$ (BARTHELEMY, 2025)	5
4.1	Distribuição de Probabilidade da Informação	15
4.2	Gráfico de Linhas da Média de Informação por Posição - Jogador de Pretas	16
4.3	Gráfico de Linhas da Média de Informação por Posição - Jogador de Brancas	16
4.4	Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação na Abertura . .	17
4.5	Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação na Abertura	18
4.6	Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Meio-jogo - $ E \leq 100$	19
4.7	Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Meio- jogo - $ E \leq 100$	20
4.8	Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Meio-jogo - $ S \geq 4$	20
4.9	Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Meio- jogo - $ S \geq 4$	21
4.10	Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Final - $ E \leq 100$	22
4.11	Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Final - $ E \leq 100$	23
4.12	Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Final - $ S \geq 4$	23
4.13	Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Final - $ S \geq 4$	24

Lista de tabelas

3.1	Estatísticas gerais do número de lances das partidas	10
4.1	Estatísticas gerais da informação	15
4.2	Estatísticas da Variação de Informação na Abertura	17
4.3	Estatísticas da Variação de Informação no Meio-jogo quando $ E \leq 100$. .	19
4.4	Estatísticas da Variação de Informação no Meio-jogo quando $ S \geq 4$. . .	20
4.5	Estatísticas da Variação de Informação na fase Final quando $ E \leq 100$. .	22
4.6	Estatísticas da Variação de Informação na fase Final quando $ S \geq 4$. . .	23

Lista de programas

2.1	Implementação da função de cálculo de informação feita em Python . . .	7
-----	--	---

Sumário

1	Introdução	1
2	Informação de uma variante	3
2.1	Modelagem teórica	3
2.1.1	Definições iniciais	3
2.1.2	Probabilidade da jogada ótima	3
2.1.3	Definição da informação de uma variante	5
2.2	Considerações da Literatura e Resultados	6
2.2.1	Parâmetros na implementação	6
2.2.2	Resultados da Literatura	6
2.3	Detalhes de implementação do cálculo da informação das posições	7
3	Dados e Metodologia de Análise	9
3.1	Sobre os dados	9
3.2	Criação de tabelas	9
3.2.1	Divisão dos lances por fase do jogo	9
3.2.2	Divisão de lances por situação	10
3.3	Interpretação da variação de informação	11
3.4	Métodos Estatísticos de Avaliação	11
3.4.1	Histograma da Distribuição de Probabilidade	11
3.4.2	Função de Distribuição Acumulada	12
3.4.3	Teste Kolmogorov–Smirnov	12
3.5	Ferramentas e Ambiente de Desenvolvimento	13
4	Análises e Resultados	15
4.1	Análise Geral da Informação das Posições	15
4.2	Abertura	17
4.2.1	Variação da Informação dos Meios-lances	17
4.3	Meio-jogo	19

4.3.1	Variação da Informação dos Meios-lances - $ E \leq 100$	19
4.3.2	Variação da Informação dos Meios-lances - $ S \geq 4$	20
4.4	Final	22
4.4.1	Variação da Informação dos Meios-lances - $ E \leq 100$	22
4.4.2	Variação da Informação dos Meios-lances - $ S \geq 4$	23
5	Conclusão	25
Referências		27

Capítulo 1

Introdução

O xadrez estabelece-se fundamentalmente como um jogo de estratégia para dois jogadores, regido por uma lógica determinística onde o resultado final — vitória, derrota ou empate — é sempre fruto de regras claras e definidas. No entanto, por trás dessa estrutura finita, reside uma complexidade combinatória de tal magnitude que historicamente desafiou a capacidade de cálculo humana, servindo como o ambiente ideal para o desenvolvimento de sistemas computacionais. Com o avanço da tecnologia, os motores de xadrez (*engines*) também avançaram sua qualidade substancialmente, evoluindo de simples experimentos teóricos para ferramentas de força bruta e, mais recentemente, para sistemas avançados como o *Stockfish* (THE STOCKFISH TEAM, 2026), que foi construído com otimizações determinísticas combinadas com redes neurais e o *AlphaZero* (SADLER e REGAN, 2019), baseada em uma rede neural profunda treinada com aprendizado por reforço. A supremacia das máquinas sobre os humanos tornou-se absoluta, de maneira que mesmos os melhores jogadores de xadrez da atualidade não conseguem derrotar as principais *engines* em suas capacidades máximas. As *engines* fornecem avaliações numéricas precisas (E) para qualquer posição, medidas em centipawns. No entanto, existe um descompasso crescente entre a "verdade" matemática calculada pela máquina e a realidade cognitiva do enxadrista humano.

Nesse contexto que se insere o trabalho recente de Barthelemy (2025) BARTHELEMY, 2025, que propõe a quantificação da informação necessária para fazer o lance ótimo, que Barthelemy chama de *information entropy*. Essa métrica visa quantificar a quantidade de informação necessária para um jogador fazer o melhor lance possível. Posições com baixa informação sugerem caminhos forçados e claros, enquanto posições de alta informação indicam múltiplas alternativas viáveis ou a necessidade de precisão cirúrgica em meio a muitas opções. A proposta deste estudo é utilizar essa métrica não apenas para avaliar a dificuldade das posições, mas como uma ferramenta para identificar e diferenciar estilos de jogo entre jogadores.

Para investigar essa hipótese, o trabalho foca na análise das partidas de dois dos maiores expoentes da história do xadrez: Garry Kasparov e Magnus Carlsen. A escolha desses dois campeões mundiais é estratégica, pois ambos dominaram suas respectivas eras através de filosofias de jogo contrastantes. Kasparov, campeão mundial de 1985 a 2000,

é reverenciado por uma transição estilística que partiu da especulação tática agressiva em sua juventude para uma abordagem estritamente científica e profunda nas aberturas, buscando testar a precisão técnica de seus adversários por meio de análises exaustivas. Em contrapartida, Magnus Carlsen, detentor do título de 2013 a 2023, adota uma postura pragmática, priorizando o desconforto do oponente sobre a profundidade teórica. Carlsen é célebre por sua capacidade de induzir erros em posições estrategicamente complexas e por sua técnica implacável em converter pequenas vantagens em finais de partida exaustivos ([CROUCH, 2013](#)).

O objetivo principal desta monografia é, portanto, verificar se é possível detectar estilos de jogos diferentes entre os jogadores citado através da análise da variação da informação causada pelos lances dos jogadores, buscando entender como cada um manipula a quantidade de informação no tabuleiro — seja aumentando o caos para confundir o oponente ou reduzindo a complexidade para controlar o resultado.

Capítulo 2

Informação de uma variante

Nesse capítulo, será apresentado a base teoria para a quantização da informação das posições de xadrez, que foi publicada por Marc Barthelemy no artigo *Chess variation entropy and engine relevance for humans* ([BARTHELEMY, 2025](#)).

2.1 Modelagem teórica

2.1.1 Definições iniciais

No contexto do xadrez, denomina-se variante qualquer sequência de movimentos válidos em uma partida. Após uma variante, o tabuleiro encontrará uma posição T à qual se atribui um valor de avaliação $E(T)$, comumente medido em *centipawns*. Nessa métrica, 100 *centipawns* equivalem à vantagem de um peão para as peças brancas. Caso a vantagem da posição atual pertença às peças pretas, o valor de $E(T)$ será negativo (ou seja, -100 *centipawns* representam a vantagem de um peão para as pretas). Considerando que, para vencer a partida, o objetivo dos jogadores é maximizar ou minimizar o valor $E(P)$ da próxima posição (dependendo da cor com a qual jogam), define-se E_1 como a avaliação ótima e E_2 como a segunda melhor opção de jogada. A diferença de qualidade entre os lances pode ser medida por $\Delta = E_1 - E_2$. A partir desse Δ , obtém-se uma dimensão do nível de dificuldade para o jogador tomar a melhor decisão em seu lance. Nos casos em que o valor de $|\Delta|$ é pequeno (geralmente inferior a 100 *centipawns*), os jogadores tendem a ter maior dificuldade em encontrar a jogada ótima. Define-se, então, o Δ_0 de um jogador como o limiar de Δ no qual ele consegue identificar a melhor jogada em detrimento da segunda opção; isto é, se em uma posição temos $\Delta_0 > |\Delta|$, o jogador é capaz de identificar o melhor movimento.

2.1.2 Probabilidade da jogada ótima

Para modelar a probabilidade do jogador escolher a melhor jogada em seu lance, utiliza-se a função *logit*, função essa que é frequentemente usada em contextos de aprendizado de máquina e modelagem estatística para a conversão de valores numéricos arbitrários em distribuições de probabilidade válidas. Utiliza-se o conceito da Teoria da Escolha Discreta

(TRAIN, 2009) de Utilidade Latente (U_i) que representa o quanto atrativo aquele lance é para o jogador. A Utilidade Latente é definida como $U_i = V_i + \epsilon_i$, em que V_i é a qualidade objetiva do lance e ϵ_i representa fatores não observáveis como algum ruído cognitivo. Assumindo que esses erros aleatórios seguem uma distribuição de probabilidade específica chamada Distribuição de Gumbel e são independentes e identicamente distribuídos, chegamos na formulação da função *logit*, em que a probabilidade de escolher o i -ésimo melhor lance dada por p_i é dada por:

$$p_i = \frac{e^{V_i}}{\sum_j e^{V_j}}$$

Modelando o valor de V_i para o contexto do xadrez, utilizou-se $V_i = E_i/\Delta_0$, de maneira que E_i é interpretado como o valor da jogada e $1/\Delta_0$ é o fator que faz a modelagem considerar a percepção daquele jogador do quanto aquela jogada é realmente boa.

A partir disso a probabilidade p_1 do jogador escolher a melhor jogada em seu lance é modelada como:

$$p_1 = \frac{e^{E_1/\Delta_0}}{\sum_{i=1} e^{E_i/\Delta_0}}$$

Considerando apenas os dois primeiros melhores movimentos na modelagem da probabilidade, tem-se que:

$$p_1 = \frac{1}{1 + e^{-\Delta/\Delta_0}}$$

Considerando uma sequência de n meios-lances, temos que a probabilidade $P(n)$ do jogador que jogou por último estar na posição ótima (considerando também as jogadas do adversário) será:

$$P(n) = \prod_{i=1}^n p_i$$

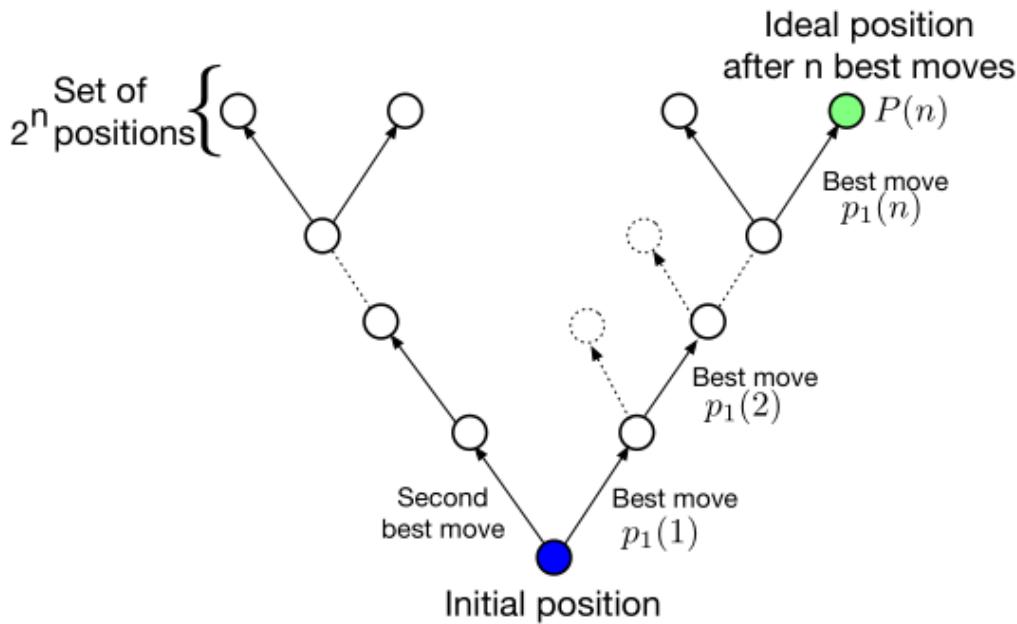


Figura 2.1: Ilustração da árvore de decisão para o cálculo de $P(n)$ (BARTHELEMY, 2025)

2.1.3 Definição da informação de uma variante

A medida de informação de um determinado evento Q é definido por $S = -\log_2(p(Q))$ onde $p(Q)$ é a probabilidade de Q ocorrer (SHANNON, 1948). Defini-se então como a quantidade de informação de uma variante (denominada no artigo que propôs o método como *information entropy*) sendo:

$$S = - \prod_{i=1}^n \log_2 \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{|\Delta(i)|}{\Delta_0}}} \right)$$

Em que $\Delta(i)$ é a diferença entre as evaluações E das duas melhores jogadas na jogada i -ésima jogada das n que estão sendo consideradas, de tal forma que estamos sempre considerando que o jogador consegue escolher a melhor jogada em cada um dos meios-lances. Temos que $0 \leq S \leq n$ e quanto maior a informação, maior a dificuldade para o jogador chegar na posição T ótima.

Com essa modelagem, estamos simulando a quantidade de informação que um ser humano deve levar em conta para fazer seu lance de maneira ótima, dado uma certa posição no tabuleiro, sendo uma sequência de decisões binárias que possuem um nível de dificuldade baseado em sua habilidade, mas que também envolve o fator de assimilar diferentes variações em sua mente de forma acumulativa.

2.2 Considerações da Literatura e Resultados

No trabalho feito por Barthelemy, foi realizado uma implementação do método explicado acima que foi utilizado para a análise da informação das posições de 100 jogos do *World Rapid Chess Tournament 2023*, campeonato mundial de xadrez que ocorreu na cidade de Samarkan. Nessa capítulo, será apresentado as principais considerações e valores de parâmetros utilizados pelo o autor que propôs o método na implementação e os resultados obtidos.

2.2.1 Parâmetros na implementação

Para a escolha do parâmetro n no cálculo de $P(n)$, visando utilizar um valor realista quanto à quantidade de informação que um ser humano consegue processar, Barthelemy utiliza como referência o trabalho de Miller [MILLER, 1956](#), que estabelece a zona de conforto da tomada de decisão humana em níveis de informação entre 2 e 3 bits (4 a 8 escolhas equiprováveis). A partir disso, o estudo projeta um cenário de análise de 8 meios-lances (plies) com uma informação estimada de 4 bits, correspondendo a $2^4 = 16$ desfechos equiprováveis. Essa relação implica que, dentro dessa árvore de decisão de 8 níveis, aproximadamente metade dos lances são "forçados"— ou seja, lances trivialmente ótimos cuja carga cognitiva para execução pode ser desconsiderada. Dessa maneira, considera-se que a complexidade combinatória efetiva é reduzida, limitando a análise a uma quantidade de informação que, embora desafiadora, ainda reside no limite superior da capacidade cognitiva humana. Para a escolha do parâmetro Δ_0 , estima-se, a partir do artigo [CHACOMA e BILLONI, 2024](#), uma ordem de magnitude de $\Delta_0 \sim 10^1$ para especialistas e $\Delta_0 \sim 10^2$ para iniciantes. Foram utilizados na implementação $\Delta_0 = 100$ para iniciantes, $\Delta_0 = 50$ para jogadores intermediários e $\Delta_0 = 10$ para especialistas.

2.2.2 Resultados da Literatura

Os resultados obtidos a partir da análise de partidas do *World Rapid Chess Tournament 2023* demonstram que a evolução da informação ao longo do jogo varia significativamente conforme o nível de habilidade do enxadrista. Para jogadores iniciantes, a informação permanece consistentemente alta ($6 < S < 7$) durante todas as fases da partida, indicando um alto nível de incerteza perpétua. Em contraste, os especialistas demonstram capacidade de reduzir drasticamente a complexidade das posições durante o meio-jogo (entre os plies 20 e 100), mantendo a informação frequentemente abaixo do limiar cognitivo de 4 bits. Contudo, observou-se que a informação volta a subir para os especialistas nos finais de partida, sugerindo que esta fase exige uma precisão crítica, onde o desvio do caminho ótimo pode alterar o resultado decisivamente. Um achado fundamental do estudo é a relação não linear entre a avaliação numérica da *engine* (E) e a informação (S). Para a maioria dos jogadores não especialistas, uma vantagem numérica clara (alto valor de $|E|$) não se traduz necessariamente em uma decisão fácil; a probabilidade de encontrar posições com alta informação ($S > 4$) permanece elevada mesmo em cenários vantajosos. Já para os especialistas, a distribuição de dificuldade é distinta: o pico de informação ocorre predominantemente em posições equilibradas ($|E| < 100$), onde o número de opções viáveis é maior, exigindo maior esforço de cálculo. O estudo conclui que a avaliação bruta das

engines possui utilidade prática limitada para humanos se não for acompanhada de uma medida de complexidade, visto que posições com informação superior a 4 bits excedem a capacidade típica da memória de trabalho humana.

2.3 Detalhes de implementação do cálculo da informação das posições

Para a execução das análises propostas neste trabalho, foi necessária a implementação da função de cálculo da informação, empregada na geração dos dados que fundamentam a análise. No cálculo da probabilidade p_i , adotou-se $\Delta_0 = 10$, visto que as partidas consideradas são de jogadores profissionais. Para o cálculo de $P(n)$, utilizou-se $n = 8$, seguindo o valor adotado pelo autor do artigo principal em suas implementações. Para determinar os valores de E necessários ao cálculo da informação, foi utilizada a biblioteca de Python chess (FIEKAS, 2025), que permite simular partidas de xadrez e integrar o *Stockfish Engine* – um dos motores de xadrez de código aberto mais populares do mundo – a fim de determinar as melhores jogadas em cada situação e seus respectivos valores. Para as chamadas da *engine*, definiram-se os parâmetros `depth = 20` (profundidade máxima de busca do motor) e `multipv = 2` (que instrui o motor a retornar as duas melhores variações para a posição específica).

Programa 2.1 Implementação da função de cálculo de informação feita em Python

```

1  def compute_information_for_position(board, engine, n_plies=8, delta0=10,
2      depth=20):
3      # Criar uma copia interna para nao modificar o board original
4      temp_board = board.copy()
5      information = 0.0
6      for i in range(n_plies):
7          # verifica se o jogo acabou
8          if temp_board.is_game_over():
9              break
10
11         info = engine.analyse(temp_board, chess.engine.Limit(depth=depth),
12             multipv=2)
13
14         # Condisional para caso de apenas um movimento legal disponivel
15         if len(info) < 2:
16             break
17
18         # Extrairindo as duas melhores possibilidades geradas pela engine
19         E1 = info[0]["score"].relative.score(mate_score=10000)
20         E2 = info[1]["score"].relative.score(mate_score=10000)
21
22         delta = abs(E1 - E2)
23         pi = 1 / (1 + math.exp(-delta / delta0))
24         information += -math.log2(pi)
25
26     temp_board.push(info[0]["pv"][0])
27
28     return information

```

Capítulo 3

Dados e Metodologia de Análise

3.1 Sobre os dados

Os lances de Kasparov foram extraídos das 197 partidas jogadas por esse jogador que estão no dataset *World Chess Championship Matches - 1866 to 2021* ([QURESHI, 2025](#)), que reúne as partidas jogadas em campeonatos considerados mundiais de xadrez de 1866 a 2021. Em relação aos dados de Magnus, foram extraídas partidas de campeonatos considerados campeonatos mundiais do dataset *Magnus Carlsen Complete Chess Games 2001-2022* ([QURESHI, 2022](#)). Os datasets contam com dados relacionados ao contexto da partida, como o ano em que foi realizada, o campeonato em que foi jogada, os jogadores envolvidos e a sequência de lances executados.

3.2 Criação de tabelas

A partir dos dados brutos extraídos, foram construídas tabelas em que cada linha representa uma posição do tabuleiro na qual o jogador avaliado deve realizar um lance. Vale ressaltar que os lances dos adversários ao jogadores em destaque nesse trabalho foram desconsiderados, principalmente devido à natureza da modelagem adotada, na qual considera-se o xadrez um jogo onde a decisão ótima de um único jogador já é suficiente para sua vitória. Foi calculada a quantidade de informação de cada posição e salva, em cada linha, a diferença de entropia causada pelo lance efetuado pelo jogador naquele momento.

3.2.1 Divisão dos lances por fase do jogo

Uma partida de xadrez é comumente dividida em três partes: Abertura, Meio-jogo e Final. Na Abertura, os jogadores concentram-se em desenvolver as peças menores (peões, cavalos e bispos), controlar o centro do tabuleiro e proteger o rei através do *roque*, estabelecendo as bases para o plano de jogo. O Meio-jogo inicia-se após a conclusão da abertura, caracterizando-se por intensa atividade e combate; é o momento em que os jogadores executam planos estratégicos e táticos para obter vantagens materiais ou posicionais. No Final, quando restam poucas peças no tabuleiro e o rei assume um papel ativo, o foco desloca-se para a promoção de peões e manobras para forçar o xeque-mate.

Jogador	Contagem	Média	Desvio Padrão	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	175	99.3438	46.9499	68.0000	85.5000	111.5000
Kasparov	197	75.9645	32.1626	51.0000	74.0000	86.0000

Tabela 3.1: Estatísticas gerais do número de lances das partidas

Como cada fase do xadrez possui características e metas próprias, foi feita a separação dos lances com base no momento em que foram realizados, com o propósito de analisar cada etapa do jogo de forma que as métricas e comparações possam ser calculadas especificamente. É importante notar que não existe na literatura enxadristica uma regra formal sobre a duração de cada fase. Para fins práticos neste trabalho, definimos que a Abertura comprehende os 15 primeiros lances, o Meio-jogo estende-se do 16º ao 50º lance, e os lances restantes são classificados como Finais. Com isso, a partir da tabela de lances de cada jogador, foram geradas outras três tabelas relacionadas a cada etapa do jogo, analisadas de forma independente. Considerando a mediana do número de lances das partidas, essa divisão concentra aproximadamente metade dos lances no Meio-jogo e de 20% a 35% na fase Final.

3.2.2 Divisão de lances por situação

A fim de refinar a análise e mitigar o ruído gerado por lances forçados ou triviais, foram geradas outras duas tabelas para as fases de Meio-jogo e Final, que possuem um maior leque de desfechos comparadas à Abertura. Nestas, filtraram-se as posições em que $|E| \leq 100$ centipawns e posições em que $S \geq 4$.

A restrição para o intervalo de avaliação $|E| \leq 100$ justifica-se pelo fato de que, embora cerca de dois terços das posições em partidas de alto nível recaiam nesta faixa, é exatamente neste cenário de equilíbrio que os jogadores especialistas enfrentam os maiores desafios de decisão. Conforme demonstrado no artigo [BARTHELEMY, 2025](#), a curva de informação para especialistas apresenta um pico distinto próximo a $E = 0$, sugerindo que posições equilibradas oferecem um número maior de opções viáveis, dificultando a seleção do melhor lance puramente por cálculo tático. Ao focar neste intervalo, o estudo isola situações onde a vantagem não é clara, forçando o jogador a recorrer ao seu estilo pessoal e intuição estratégica.

O filtro de informação $S \geq 4$ foi aplicado para identificar posições de alta incerteza. Por mais que jogadores experientes tendam a manter a informação baixa para controlar o jogo, posições em que $S \geq 4$ representam momentos em que a jogada ótima não está evidente. A hipótese central é que o estilo dos jogadores torna-se mais nítido nestes pontos de divergência crítica, nos quais a *engine* não aponta um caminho único e a escolha do lance reflete a preferência do jogador por simplificação (redução de S) ou complicação (aumento de S).

3.3 Interpretação da variação de informação

Como o objetivo deste trabalho é identificar diferenças entre os estilos de jogo de Magnus e Kasparov, o foco das análises foi avaliar a disparidade entre as variações de informação causadas pelos lances de cada jogador nas três fases do jogo.

Quanto maior a variação de informação gerada por um lance, maior será a complexidade para a tomada de decisão do adversário e maior será o número de rumos possíveis para o jogo. A diferença de vantagem entre as decisões que o oponente pode tomar após o aumento de informação é menor, levando o jogo para posições em que o cálculo de movimentos futuros torna-se extremamente relevante. Uma concentração de jogadas de aumento de informação indica que o jogador possui um estilo focado em explorar a criatividade, o que eleva a carga cognitiva do adversário e o desafia a encontrar a sequência correta em um cenário de explosão combinatória.

No caso de variações negativas de informação, o jogador busca posições em que a jogada ótima para o adversário é mais visível. Na prática, isso força o oponente a realizar tal jogada para evitar uma desvantagem acentuada, mesmo que a jogada ótima ainda resulte em perdas. Uma concentração de jogadas de redução de informação indica um estilo que diminui a complexidade combinatória real do tabuleiro no jogo, favorecendo a precisão técnica sobre a ambiguidade tática.

3.4 Métodos Estatísticos de Avaliação

As análises foram realizadas considerando os lances de Magnus e Kasparov como duas amostras distintas. O objetivo principal foi identificar divergências entre essas amostras e validar se é possível afirmar, com base na distribuição da variável analisada, que elas provêm de distribuições de fato diferentes.

Para uma análise qualitativa, os principais instrumentos utilizados foram os histogramas de distribuição de probabilidade e as Funções de Distribuição Acumulada, detalhados a seguir. Para verificar de forma quantitativa se as diferenças possuem significância estatística real, utilizou-se o teste Kolmogorov–Smirnov (teste K-S).

3.4.1 Histograma da Distribuição de Probabilidade

O histograma é uma representação gráfica da distribuição de frequências de um conjunto de dados quantitativos contínuos, servindo como um estimador não paramétrico da Função de Densidade de Probabilidade (PDF). Diferente de um gráfico de barras comum, no histograma de densidade, a área de cada retângulo é proporcional à frequência da classe, e a área total é normalizada para 1. Isso permite a interpretação probabilística e a comparação entre duas amostras, mesmo que possuam tamanhos diferentes.

Para cada barra do histograma, também foi calculado uma barra de erro que foi gerada por meio do método *bootstrap* (EFRON, 1979), em realizar a reamostragem dos dados originais com reposição múltiplas vezes, gerando diversos subconjuntos de dados. A partir desses novos conjuntos, calculou-se o desvio padrão de cada amostra e usou-se essa medida como

barra de erro, de tal forma que se as barras de erro das distribuições se intersectam não se pode afirmar que existe uma diferença estatisticamente significativa entre os valores comparados, indicando que a variação observada pode ser apenas fruto da incerteza amostral. Por outro lado, a ausência de sobreposição entre as barras sugere que as distribuições são suficientemente distintas para o nível de confiança estabelecido. O desvio padrão foi calculado via 1000 repetições do bootstrap.

3.4.2 Função de Distribuição Acumulada

A Função de Distribuição Acumulada (FDA), ou *Cumulative Distribution Function* (CDF), descreve o comportamento de uma variável aleatória. Ao contrário da PDF, que mostra a concentração de dados em intervalos específicos, a FDA apresenta a probabilidade acumulada:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Na prática, utiliza-se a Função de Distribuição Acumulada Empírica (ECDF). Para uma amostra de tamanho n , a fórmula é:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x_i \leq x}$$

Em que $\mathbf{1}_{x_i \leq x}$ é uma função indicadora que vale 1 se o valor x_i for menor ou igual a x , e 0 caso contrário.

3.4.3 Teste Kolmogorov–Smirnov

O teste Kolmogorov–Smirnov (K-S) é um método não paramétrico utilizado para determinar se duas distribuições de probabilidade diferem entre si. Diferentemente de testes paramétricos (como o teste-t), o K-S não assume normalidade (distribuição Gaussiana), sendo ideal para dados empíricos complexos.

O objetivo é verificar a hipótese nula (H_0) de que duas amostras independentes foram extraídas da mesma distribuição contínua. A hipótese alternativa (H_1) é que as amostras provêm de distribuições distintas. A estatística do teste, D , é a distância vertical máxima entre as duas curvas de distribuição acumulada:

$$D = \sup_x |F_{1,n}(x) - F_{2,m}(x)|$$

A partir de D , calcula-se a estatística normalizada:

$$D_{n_1, n_2} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D$$

À medida que n_1 e n_2 crescem, sob H_0 , a probabilidade de D_{n_1, n_2} ser menor que um parâ-

metro s converge assintoticamente para a distribuição de Smirnov ([DESHPANDE *et al.*, 2018](#)):

$$P [D_{n_1, n_2} \leq s] \rightarrow 1 - 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} e^{-2r^2 s^2}$$

Na prática, utiliza-se o p -valor, que indica a probabilidade de encontrar uma diferença maior do que a observada caso H_0 fosse verdadeira: $p = 1 - P [D_{n_1, n_2} \leq s]$. Define-se um nível de significância $\alpha = 0,05$; se $p \leq \alpha$, rejeita-se a hipótese nula.

3.5 Ferramentas e Ambiente de Desenvolvimento

As análises estatísticas e o processamento de dados foram realizados em linguagem Python 3.12.3 ([PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2026](#)), utilizando o ambiente Jupyter Notebook. Para a manipulação dos dados brutos, utilizou-se a biblioteca Pandas ([THE PANDAS DEVELOPMENT TEAM, 2026](#)). Os testes de hipótese foram executados via biblioteca SciPy, enquanto a visualização dos resultados foi feita com a biblioteca Matplotlib ([THE MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM, 2026](#)).

Capítulo 4

Análises e Resultados

4.1 Análise Geral da Informação das Posições

Jogador	Contagem	Média	IC 95 %	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	8447	3.9100	[3.8677, 3.9523]	2.4118	3.7961	5.3388
Kasparov	7395	3.5237	[3.4849, 3.5624]	2.3412	3.4823	4.5568

Tabela 4.1: Estatísticas gerais da informação

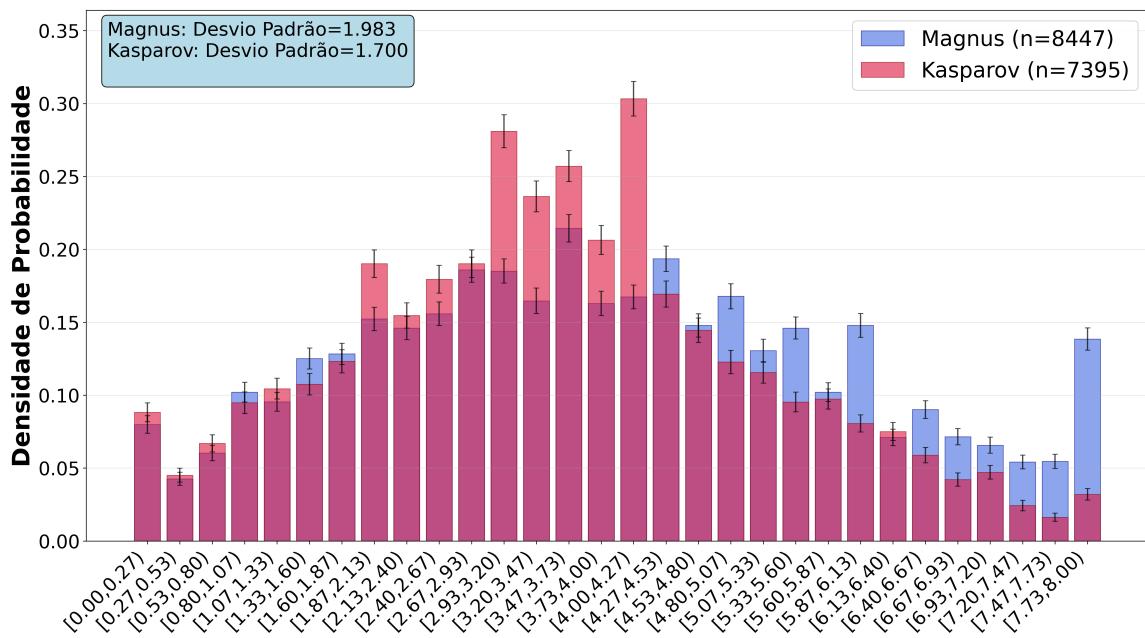


Figura 4.1: Distribuição de Probabilidade da Informação

Em conformidade com o artigo CHACOMA e BILLONI, 2024, tem-se que a maioria das posições dos meios-lances possui informação média com valores próximos ao intervalo

entre 3 e 4 bits. É notável que Magnus possui maior densidade de posições no tabuleiro com informação superior a 4. Uma explicação possível para essa diferença é o avanço no estudo do xadrez com o surgimento das *engines*, permitindo que jogadores contemporâneos naveguem por posições de maior complexidade combinatória que, anteriormente, poderiam ser descartadas devido à dificuldade do cálculo humano, mas que agora se mostram viáveis após análises dos desfechos dessas posições, o que também é um fator que possa ter moldado o estilo de jogo de Magnus.

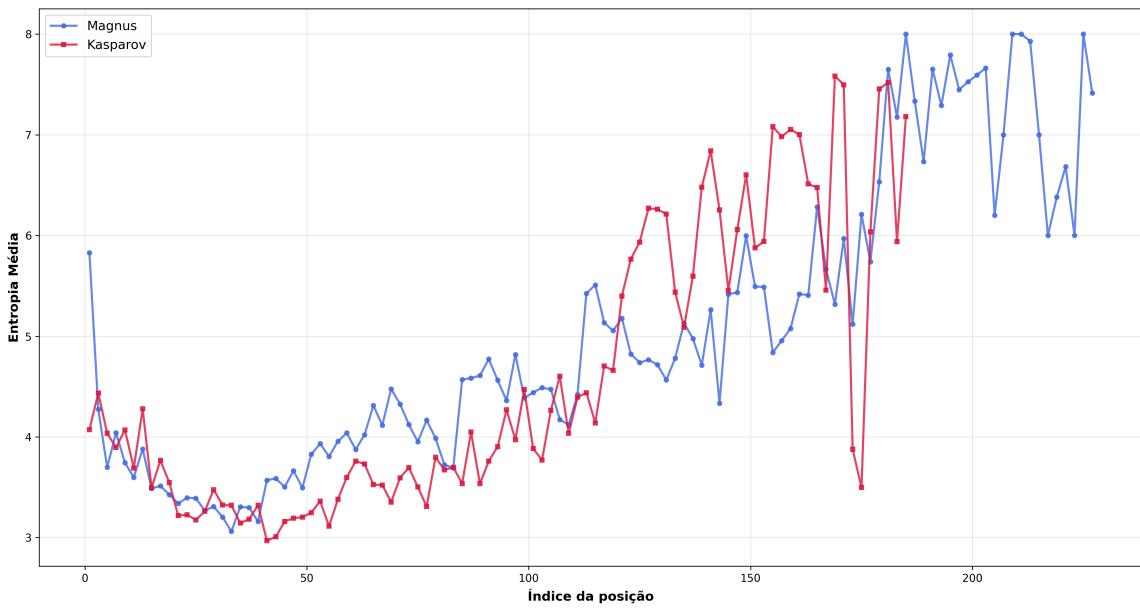


Figura 4.2: Gráfico de Linhas da Média de Informação por Posição - Jogador de Pretas

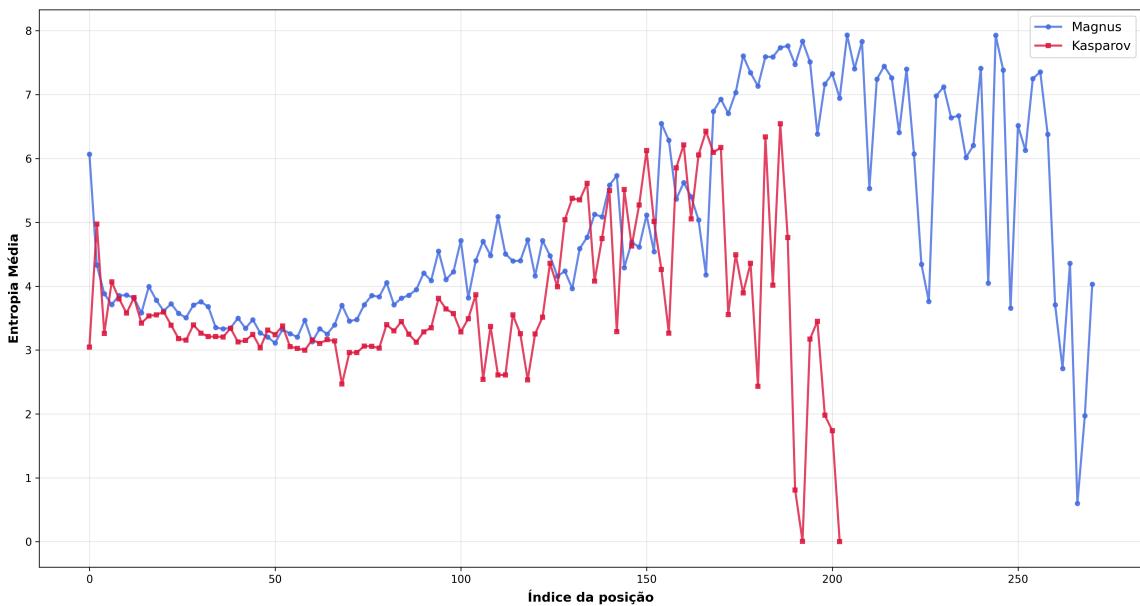


Figura 4.3: Gráfico de Linhas da Média de Informação por Posição - Jogador de Brancas

Analisando as figuras 4.2 e 4.3, o comportamento da informação dos jogadores mostra-

se parecido com o apresentado no artigo **CHACOMA e BILLONI, 2024**, em que a informação vai decaindo ao longo da abertura e do meio-jogo, mas volta a subir na fase final.

É possível observar que o comportamento da informação se altera consideravelmente nas finais que se estendem por mais de 100 meios-lances (que representam uma minoria nos dados, conforme visto em 3.1). Nessas situações, os valores de informação média sobem significativamente, principalmente nas posições de Magnus, e apresentam uma oscilação abrupta com amplitudes maiores que 1 bit de informação. Isso evidencia a criação de posições de alta informação e sua resolução em poucos meios-lances, o que é demonstrado pela redução brusca do valor dessa variável.

4.2 Abertura

4.2.1 Variação da Informação dos Meios-lances

Jogador	Contagem	Média	IC (95%)	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	1225	-0.1426	[-0.2070, -0.0782]	-0.7553	-0.0144	0.6010
Kasparov	1478	0.0699	[-0.0001, 0.1398]	-0.7304	0.0251	1.0232

Tabela 4.2: Estatísticas da Variação de Informação na Abertura

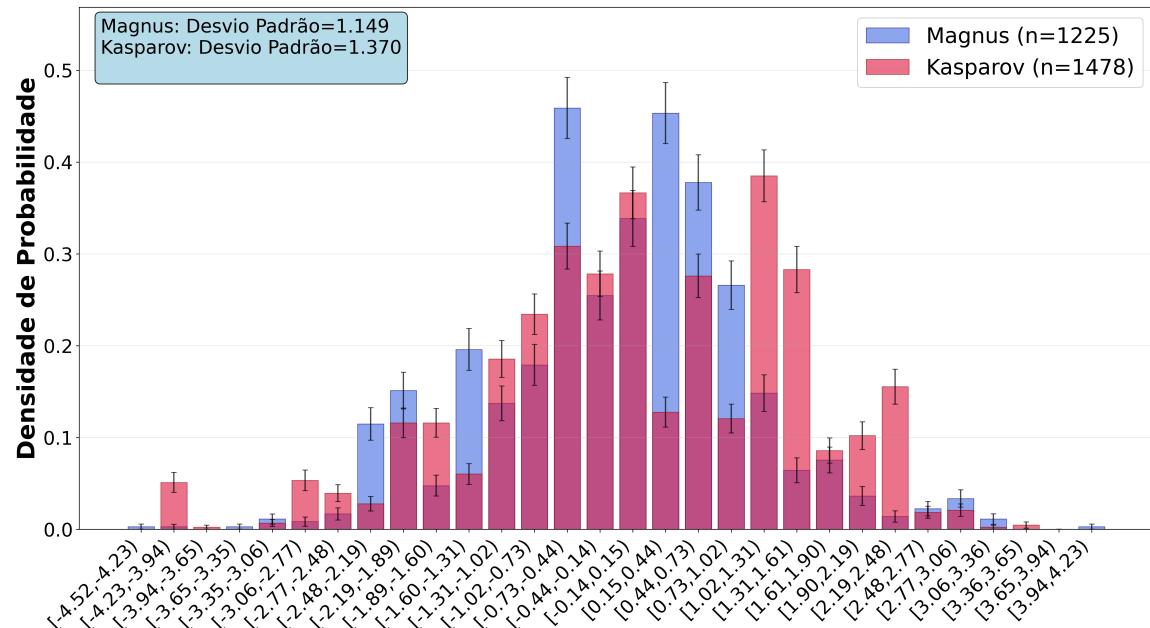


Figura 4.4: Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação na Abertura

Analizando o histograma, é possível notar que Magnus possui uma grande concentração de lances com baixa variação de informação em comparação a Kasparov, apresentando intervalos com densidade de probabilidade consideravelmente maior no intervalo (-0.73, 1.20]. Em contrapartida, Kasparov possui maior densidade de lances com alta variação de

informação, principalmente se comparado aos de Magnus no intervalo [0.95, 2.49]. Essa diferença evidencia que Kasparov busca fazer lances na fase de abertura que maximizam a complexidade estratégica e a carga cognitiva imposta ao oponente. Enquanto Magnus Carlsen tende a conduzir o jogo para caminhos de baixa informação, forçando lances ao adversário.

Realizando o teste Kolmogorov-Smirnov (KS) para os dados, obteve-se o valor de estatística KS igual a 0,193401 e um p-valor igual a 0. Logo, é possível afirmar que as amostras são oriundas de distribuições diferentes, o que evidencia estilos de jogo distintos entre os jogadores nessa fase. No gráfico das FDA's (4.5), observa-se que a diferença entre a probabilidade acumulada dos jogadores se acentua no intervalo [0, 1], atingindo seu pico quando a variação de informação é igual a 0.999, mas volta a diminuir após esse intervalo. Isso mostra a clara tendência de Magnus em realizar mais jogadas com essa variação de informação do que Kasparov, indicando uma abertura mais posicional e com menor complexidade combinatória imediata.

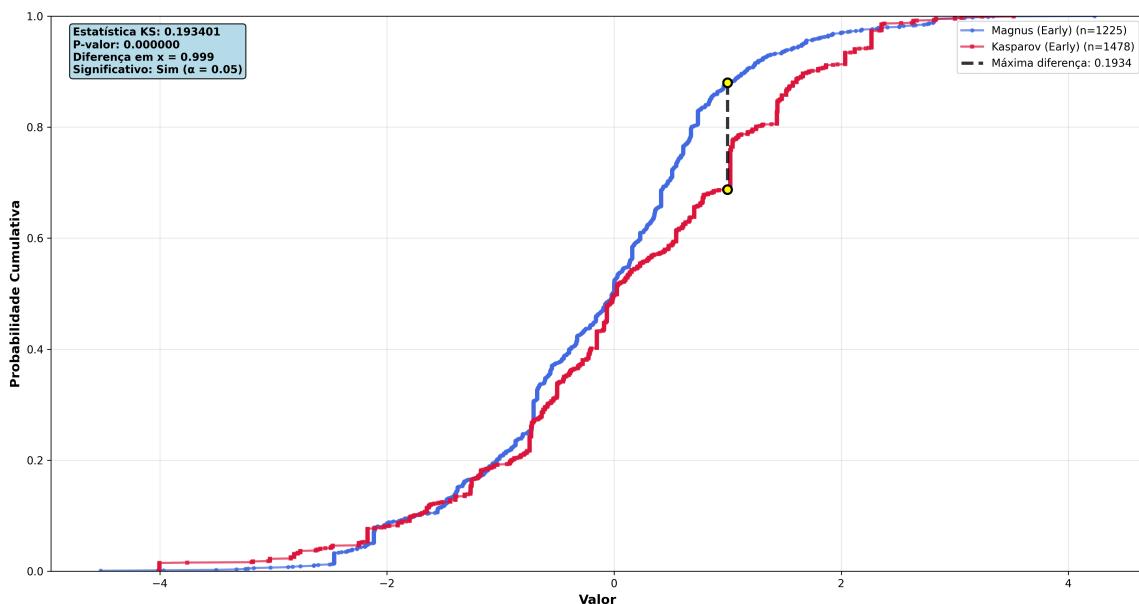


Figura 4.5: Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação na Abertura

4.3 Meio-jogo

4.3.1 Variação da Informação dos Meios-lances - $|E| \leq 100$

Jogador	Contagem	Média	IC 95 %	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	2762	0.0251	[-0.0253, 0.0754]	-0.7459	0.0754	0.8640
Kasparov	3000	0.0421	[-0.0042, 0.0884]	-0.7483	0.0780	0.8420

Tabela 4.3: Estatísticas da Variação de Informação no Meio-jogo quando $|E| \leq 100$

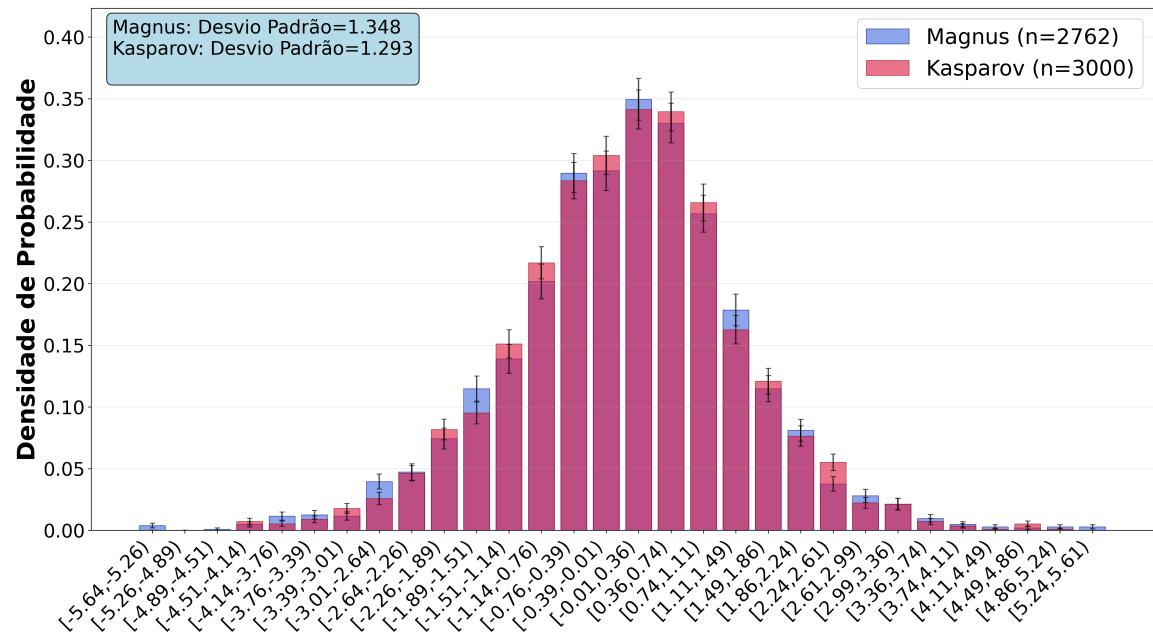


Figura 4.6: Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Meio-jogo - $|E| \leq 100$

Observa-se que as distribuições de probabilidade das amostras de ambos os jogadores são bem parecidas e as barras de erros das distribuições se intersectam para todos os intervalos em que a densidade de probabilidade é maior que 0.10, o que enfatiza a dificuldade de afirmar se as amostras são oriundas de jogadores diferentes. Ao realizar o teste de Kolmogorov-Smirnov, obteve-se um valor de estatística KS de 0,014352 e um p-valor de 0,922681. Assim, não é possível afirmar que as amostras provêm de distribuições distintas nem detectar estilos de jogo diferentes por meio desta análise específica.

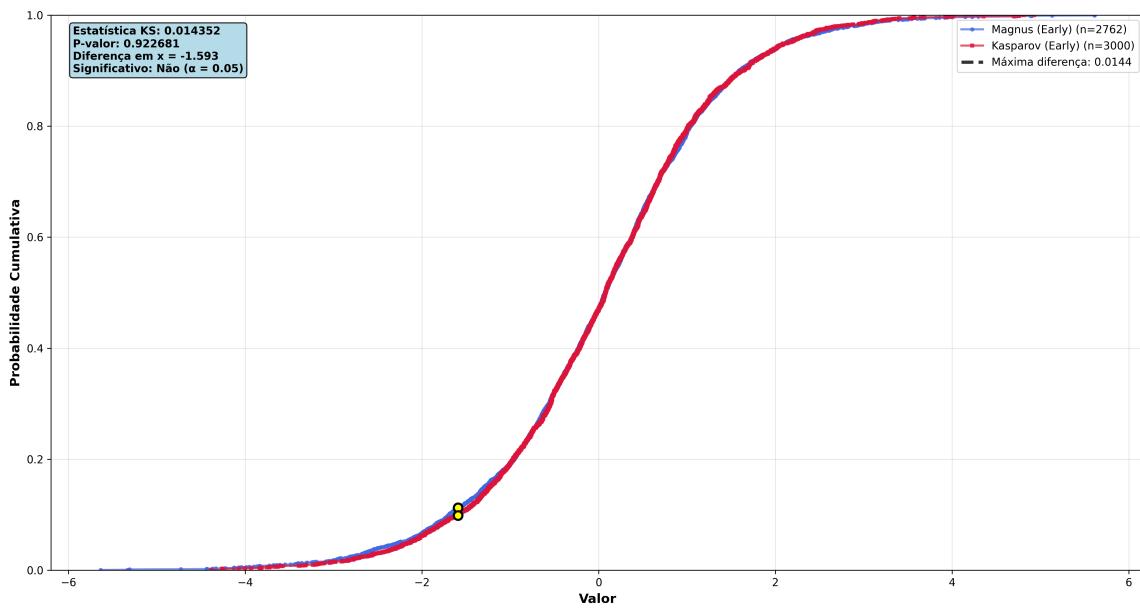


Figura 4.7: Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Meio-jogo - $|E| \leq 100$

4.3.2 Variação da Informação dos Meios-lances - $|S| \geq 4$

Jogador	Contagem	Média	IC 95%	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	1112	0.6883	[0.6155, 0.7611]	-0.1260	0.6273	1.4113
Kasparov	996	-0.7221	[-0.7969, -0.6472]	-1.4235	-0.5890	0.1251

Tabela 4.4: Estatísticas da Variação de Informação no Meio-jogo quando $|S| \geq 4$

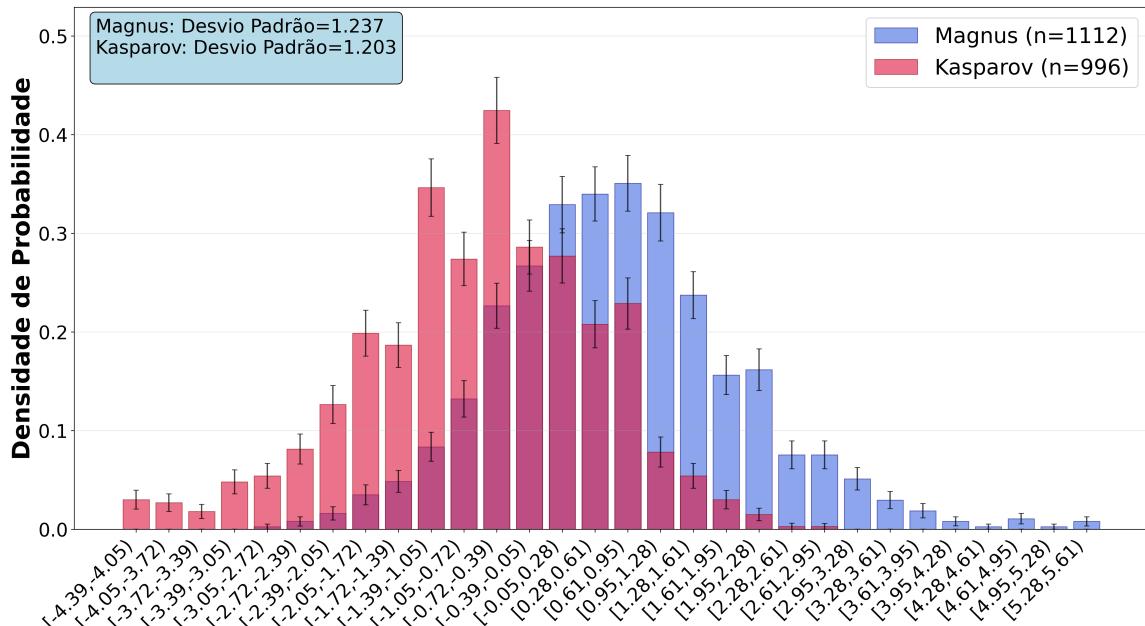


Figura 4.8: Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Meio-jogo - $|S| \geq 4$

No Meio-jogo, as distribuições da variação de informação quando $|S| \geq 4$ são bem distintas. Kasparov demonstra uma clara tendência a realizar jogadas de redução de informação nessa situação, com uma densidade significativamente maior no intervalo [-4,29; 0,28]. Já Magnus apresenta maior densidade no intervalo [0,28, 5,61], buscando aumentar a complexidade combinatória do tabuleiro. No teste Kolmogorov–Smirnov, o valor da estatística KS foi 0.434111 com p-valor de 0, permitindo afirmar que as amostras provêm de distribuições diferentes. A diferença entre as FDA's (4.9) é evidente. Embora o ponto máximo de divergência seja quando a variação de entropia é igual a -0.001, as curvas se diferenciam constantemente em todo intervalo analisado, sem nenhum ponto de intersecção. Esse comportamento mostra de forma quantitativa que Magnus maximiza a incerteza do tabuleiro ao manter uma alta densidade de opções viáveis, utilizando a complexidade como ferramenta para sobreregar a memória de trabalho e os limites cognitivos do oponente, e Kasparov atua como um redutor de ruído informacional, empregando sua precisão para simplificar a árvore de decisão e converter situações complexas em trajetórias mais determinísticas e de menor carga cognitiva.

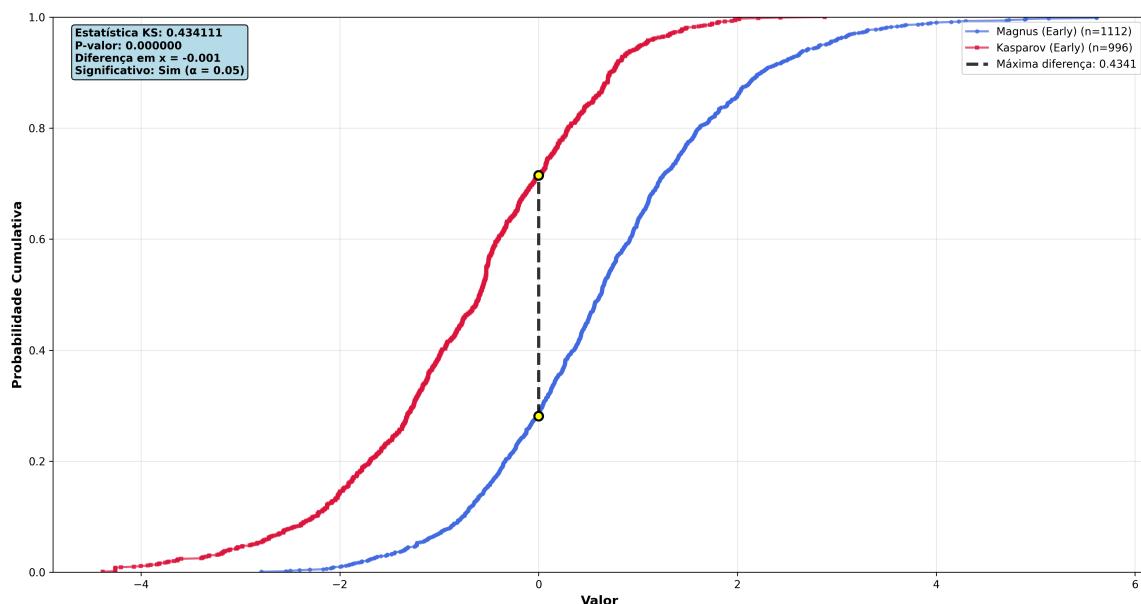


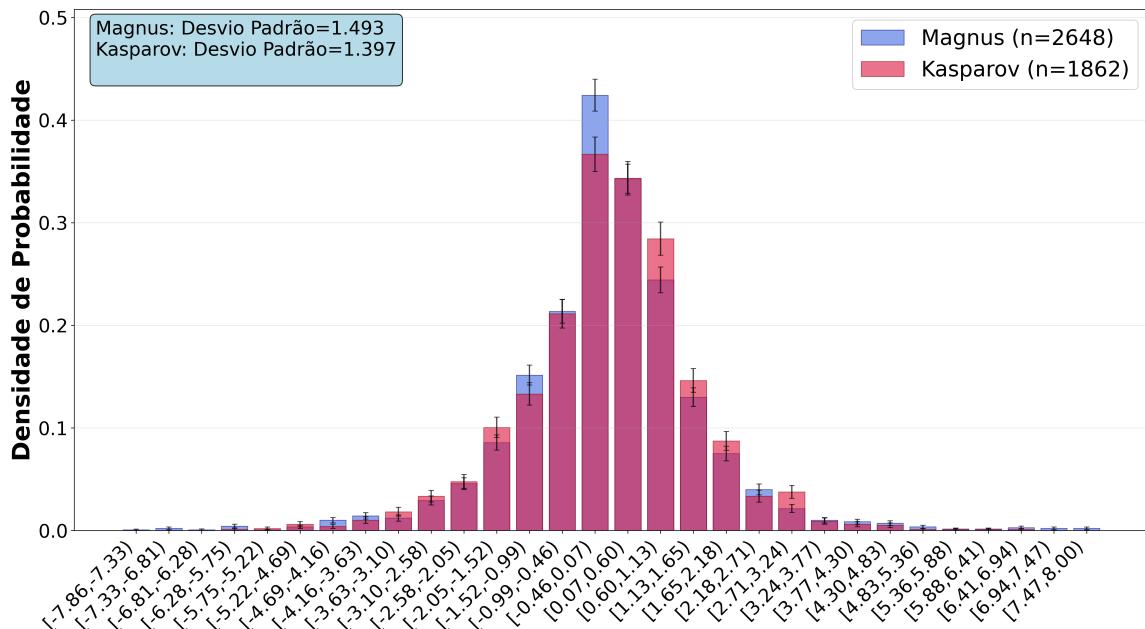
Figura 4.9: Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Meio-jogo - $|S| \geq 4$

4.4 Final

4.4.1 Variação da Informação dos Meios-lances - $|E| \leq 100$

Jogador	Contagem	Média	IC 95%	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	2648	0.0245	[-0.0324, 0.0814]	-0.6310	0.0065	0.7539
Kasparov	1862	0.0483	[-0.0152, 0.1118]	-0.6700	0.0854	0.8630

Tabela 4.5: Estatísticas da Variação de Informação na fase Final quando $|E| \leq 100$



4.4 | FINAL

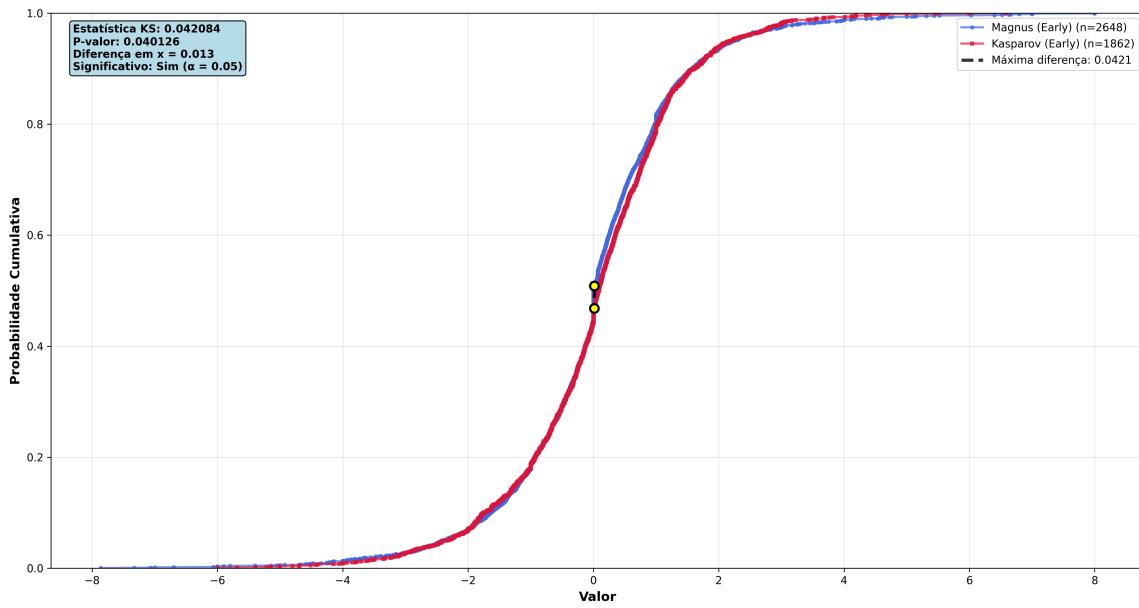


Figura 4.11: Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Final - $|E| \leq 100$

4.4.2 Variação da Informação dos Meios-lances - $|S| \geq 4$

Jogador	Contagem	Média	IC 95%	Quantil 25%	Quantil 50%	Quantil 75%
Magnus	2142	0.3785	[0.3187, 0.4382]	-0.7780	0.0000	0.5074
Kasparov	1116	-0.3144	[-0.3932, -0.2355]	-0.9981	-0.9981	0.5391

Tabela 4.6: Estatísticas da Variação de Informação na fase Final quando $|S| \geq 4$

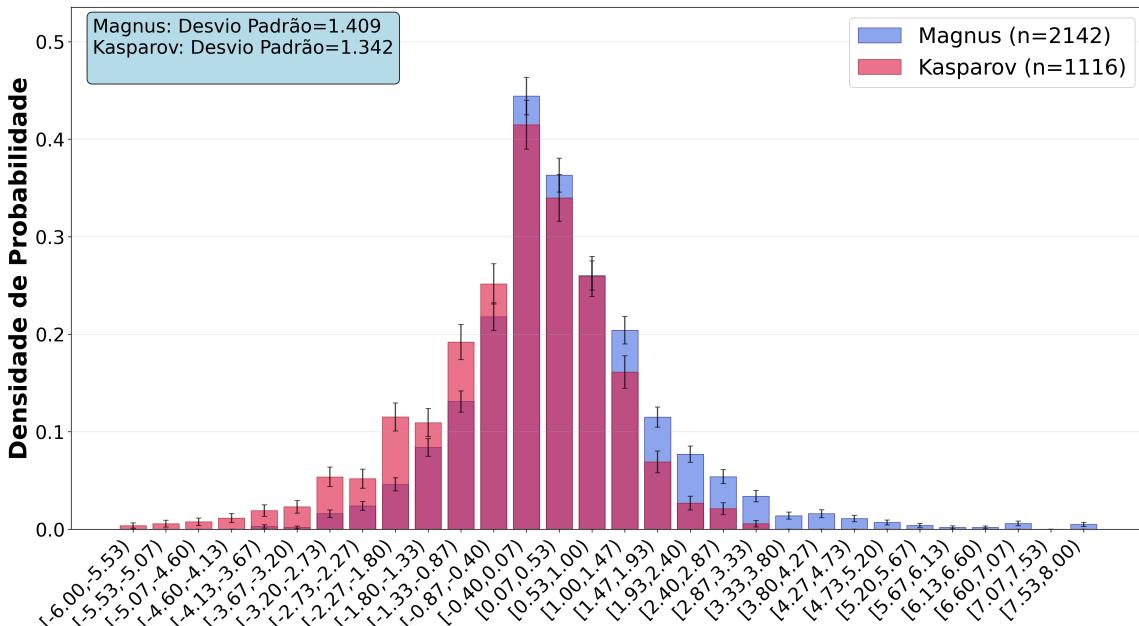


Figura 4.12: Distribuição de Probabilidade da Variação de Informação no Final - $|S| \geq 4$

Embora ambos os jogadores tenham a maior densidade de jogadas no intervalo [-0.40, 0.53), Magnus tem maior tendência a aumentar informação do tabuleiro, se sobrepondo na densidade de jogadas no intervalo [1, 5.20) sem que as barras de erros se encontrem. Kasparov se sobrepõe de forma significativa no intervalo [-4.60, -0.40), focando em reduzir a informação do tabuleiro. No teste Kolmogorov-Smirnov, obteve-se KS igual a 0.176990 e p-valor de 0, confirmando que as amostras provêm de distribuições distintas. A diferença entre as FDA's para os valores negativos corrobora a ideia de que, no final, Magnus tende a preservar a tensão e a complexidade combinatória (alta informação), enquanto Kasparov opta por caminhos mais concretos e de cálculo direto, buscando reduzir drasticamente a variação de informação por meio de lances forçados ou simplificações táticas agudas.

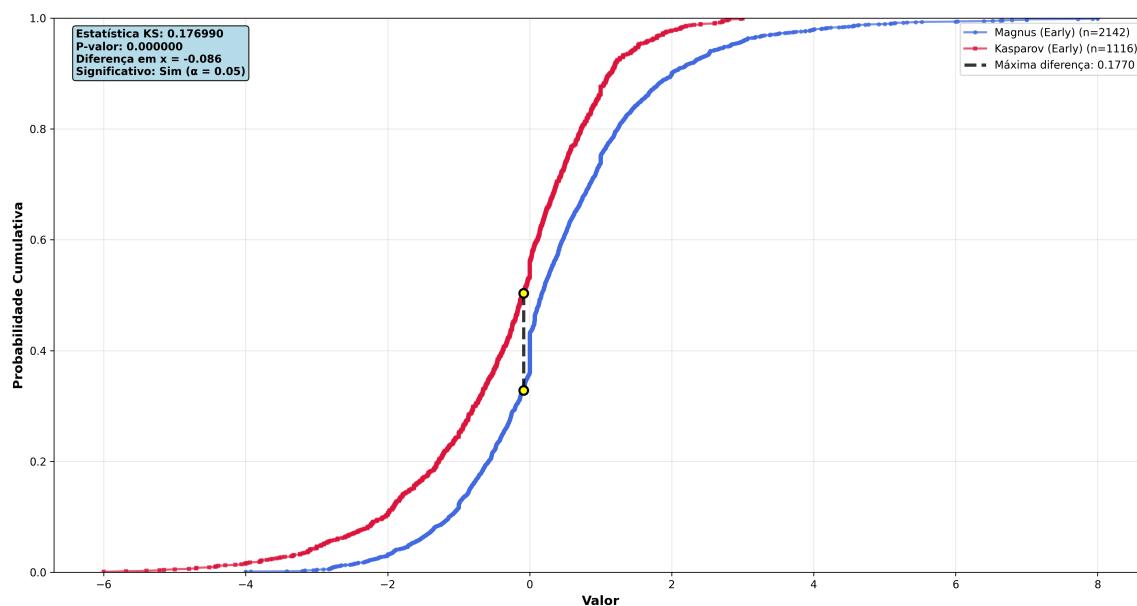


Figura 4.13: Funções de Distribuição Acumulada da Variação de Informação no Final - $|S| \geq 4$

Capítulo 5

Conclusão

Demonstrou-se que a métrica de variação de informação é uma ferramenta eficaz para quantificar a complexidade cognitiva e diferenciar estilos de jogo no xadrez de alto nível. Em uma análise geral inicial, observou-se que as partidas de Magnus Carlsen possuem uma entropia média consistentemente superior às de Garry Kasparov.

Seguindo a análise por fases, a etapa de Abertura revelou uma distinção clara entre os jogadores, validada pelo teste Kolmogorov-Smirnov. Enquanto Magnus Carlsen demonstra uma tendência a buscar posições de caráter posicional e controlado, com baixa variação de informação, Kasparov buscavaativamente elevar a complexidade do tabuleiro já nos primeiros lances, aumentando a carga cognitiva do adversário.

Em situações de equilíbrio material ($|E| \leq 100$ centipawns), não é possível afirmar que as amostras provenham de distribuições distintas no Meio-jogo e, na fase Final, por mais que o teste de Kolmogorov-Smirnov tenha gerado um p-valor menor que 0.05, as distribuições de probabilidade e FDA's dos jogadores possuem semelhança considerável, o que coloca em dúvidas o quão a diferença esta relacionada ao estilo de jogo dos jogadores. Entretanto, ao filtrar apenas as posições de alta incerteza ($|S| \geq 4$), o estilo de jogo torna-se novamente detectável e estatisticamente significativo.

Nesses momentos críticos, observou-se que Magnus Carlsen tende a preservar ou aumentar a complexidade combinatória, mantendo a tensão no tabuleiro. Em contrapartida, Garry Kasparov demonstrava preferência por meios-lances que reduziam drasticamente a variação de informação, optando por simplificações táticas agudas ou caminhos de cálculo mais diretos e forçados para resolver as posições. Assim, o trabalho conclui que a variação da informação permite traduzir em métricas matemáticas o que a literatura enxadrística descreve intuitivamente como a diferença entre um estilo dinâmico e agressivo versus um estilo posicional de alta precisão.

Referências

- [BARTHELEMY 2025] Marc BARTHELEMY. “Chess variation entropy and engine relevance for humans” (mai. de 2025). arXiv: 2505.03251 [physics.soc-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.03251> (citado nas pgs. 1, 3, 5, 10).
- [CHACOMA e BILLONI 2024] A. CHACOMA e O. V. BILLONI. “Emergent complexity in the decision-making process of chess players” (2024). arXiv preprint arXiv:2406.15463. arXiv: 2406.15463 [physics.soc-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2406.15463> (citado nas pgs. 6, 15, 17).
- [CROUCH 2013] Colin CROUCH. *Magnus Force: How Carlsen Beat Kasparov’s Record*. London: Everyman Chess, 2013 (citado na pg. 2).
- [DESHPANDE *et al.* 2018] Jayant V DESHPANDE, Uttara NAIK-NIMBALKAR e Isha DEWAN. *Nonparametric statistics: theory and methods*. New Jersey: World Scientific, 2018. ISBN: 978-981-4663-57-1 (citado na pg. 13).
- [EFRON 1979] Bradley EFRON. “Bootstrap methods: another look at the jackknife”. *The Annals of Statistics* 7.1 (1979), pp. 1–26 (citado na pg. 11).
- [FIEKAS 2025] Niklas FIEKAS. *chess: a chess library for Python*. Versão 1.11.2. 2025. URL: <https://pypi.org/project/chess/> (citado na pg. 7).
- [MILLER 1956] George A. MILLER. “The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information”. *Psychological Review* 63.2 (1956), pp. 81–97. DOI: [10.1037/h0043158](https://doi.org/10.1037/h0043158) (citado na pg. 6).
- [PYTHON SOFTWARE FOUNDATION 2026] PYTHON SOFTWARE FOUNDATION. *Python language reference, version 3.12.3*. Acessado em: 10 jan. 2026. 2026. URL: <https://www.python.org/> (citado na pg. 13).
- [QURESHI 2022] Zaid QURESHI. *Magnus Carlsen Complete Chess Games 2001-2022*. <https://www.kaggle.com/datasets/zq1200/magnus-carlsen-complete-chess-games-20012022>. Acedido em: 17 de janeiro de 2026. 2022 (citado na pg. 9).
- [QURESHI 2025] Zaid QURESHI. *World Chess Championship Matches - 1866 to 2021*. 2025. URL: <https://www.kaggle.com/datasets/zq1200/world-chess-championships-1866-to-2021> (citado na pg. 9).

- [SADLER e REGAN 2019] Matthew SADLER e Natasha REGAN. *Game Changer: AlphaZero's Groundbreaking Chess Strategies and the Promise of AI*. Alkmaar: New in Chess, 2019 (citado na pg. 1).
- [SHANNON 1948] Claude E. SHANNON. “A mathematical theory of communication”. *The Bell System Technical Journal* 27.3 (jul. de 1948), pp. 379–423 (citado na pg. 5).
- [THE MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM 2026] THE MATPLOTLIB DEVELOPMENT TEAM. *Matplotlib: Visualization with Python*. <https://matplotlib.org/>. Acessado em: 10 jan. 2026. 2026 (citado na pg. 13).
- [THE PANDAS DEVELOPMENT TEAM 2026] THE PANDAS DEVELOPMENT TEAM. *pandas: powerful Python data analysis toolkit*. <https://pandas.pydata.org/>. Acessado em: 10 jan. 2026. 2026 (citado na pg. 13).
- [THE STOCKFISH TEAM 2026] THE STOCKFISH TEAM. *Stockfish – Open Source Chess Engine*. <https://stockfishchess.org/>. Acessado em: 07 jan. 2026. 2026 (citado na pg. 1).
- [TRAIN 2009] Kenneth E. TRAIN. *Discrete Choice Methods with Simulation*. 2nd. Cambridge: Cambridge University Press, 2009 (citado na pg. 4).