

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Interseção de caminhos mais longos em
grafos**

Idian Camargo Capozzoli

MONOGRAFIA FINAL

MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof.^a Dr.^a Yoshiko Wakabayashi

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu bolsa PICME pelo CNPq.

São Paulo
2024

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Professora Yoshiko, pelo suporte, paciência e atenção. Foram suas ótimas aulas de Grafinhos que me motivaram estar nessa área de pesquisa.

A todos os meus amigos da USP, especialmente os mais próximos do BCC, por todos os nossos cafés pós almoço, por todas as conversas, discussões, risadas e palhaçadas no Labx. Meus dias no IME USP são muito mais felizes com vocês.

Aos amigos do teorime, Henri, João, Perin, Motinha, por todas as matérias que fizemos juntos, pelos grupos de estudos, discussões de problemas, muitos cafés e por compartilharem o mesmo sonho de seguir carreira acadêmica comigo.

Ao Henri, por todas as conversas, risadas e choros, por todos os estudos e ajuda, pelo apoio e carinho. E também por todos os cafézinhos depois do bandejão da química.

À Samina, por ser essa amiga incrível desde o primeiro dia de aula, que me dá forças sempre para continuar. Obrigada por todo carinho e preocupação, você é muito especial.

Ao Wictor, que desde o ensino médio sempre esteve presente em minha vida apesar de qualquer distância, por toda confiança, amizade e companheirismo.

Às minhas queridas amigas Laura e Glória, minhas gatinhas do 42, por dividir comigo não só um apartamento, mas um lar nesses 3 anos em São Paulo. Por todas as conversas, cafés, momentos tristes e felizes.

Ao Pedro, por me acompanhar e apoiar por mais de 7 anos com muito carinho independente de qualquer coisa. Aos seus pais, Carmen e Marcos e sua avó Carmelina que também sempre torceram pelo meu melhor.

Aos meus professores e amigos Kátia e Ari, que sempre acreditaram em meu potencial, me apoiaram e acompanharam desde o ensino fundamental, e me fizeram gostar tanto de matemática.

À minha família que eu amo muito, aos meus pais Benedita e Rodriguo e aos meus irmãos Hiram e Luã, por todo amor e cuidado, e por sempre me apoiarem em todas as

minhas escolhas. Vocês sempre fizeram de tudo para que eu alcançasse meus objetivos, nada disso seria possível sem vocês.

Resumo

Idian Camargo Capozzoli. **Interseção de caminhos mais longos em grafos**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Esta monografia investiga problemas sobre interseção de caminhos mais longos em grafos. Os estudos sobre este tema tiveram origem numa pergunta feita por Tibor Gallai em um colóquio na Hungria, em 1966. Gallai perguntou se todos os caminhos mais longos em um grafo conexo possuem um vértice comum. A resposta negativa a esta pergunta foi dada em 1969, mas desde então muita pesquisa tem sido feita a respeito deste problema e outros correlatos. O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma resenha sobre este tópico, abordando tanto o caso de todos os caminhos mais longos quanto o caso de um número fixo k de caminhos. Para isso, investigamos a questão em grafos arbitrários e em classes especiais de grafos, destacando algumas para as quais já foi provada a existência ou não de um vértice na interseção de tais caminhos. Apresentamos vários resultados conhecidos e as provas de alguns deles. Além disso, abordamos alguns aspectos algorítmicos relativos aos caminhos mais longos de um grafo: como encontrar um ou como encontrar um vértice comum a todos eles.

Palavras-chave: Teoria dos grafos. Caminhos mais longos. Interseção de caminhos.

Abstract

Idian Camargo Capozzoli. **Intersection of longest paths in graphs**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2024.

This monograph investigates problems on intersection of longest paths in graphs. The studies on this topic traces back to a question raised by Tibor Gallai at a colloquium in Hungary, in 1966. He asked whether it is true that all longest paths in a connected graph have a common vertex. The negative answer to this question was found in 1969, but since then much research has been carried out on this problem and related ones. The main objective of this work is to present a review on this topic, addressing both the case of all longest paths and the case of a fixed number k of paths. For this, we investigate the topic in arbitrary graphs and in special classes of graphs, highlighting those in which the existence or non-existence of a vertex in the intersection of such paths has already been proven. We present a number of known results and the proofs of some of them. Additionally, we discuss some algorithmic aspects related to longest paths in a graph: how to find one or how to find a vertex common to all of them.

Keywords: Graph theory. Longest paths. Intersection of paths.

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
2 Conceitos básicos da teoria dos grafos	3
3 Grafos sem vértice de Gallai	7
3.1 Primeiro exemplo	8
3.2 Exemplo de menor ordem	8
3.3 Exemplos planares	10
3.4 Grafos k -conexos	10
3.4.1 Grafos 2-conexos	10
3.4.2 Grafos 3-conexos	11
3.4.3 Grafos 4-conexos	11
4 Grafos com vértice na interseção de um número fixo de caminhos	13
4.1 Dois caminhos mais longos	13
4.2 Três caminhos mais longos	14
4.2.1 Grafos exoplanares	14
4.2.2 Grafos conexos cujos blocos não triviais são hamiltonianos . . .	15
4.2.3 Grafos de Mark	15
5 Grafos com vértice de Gallai	17
5.1 Árvores	17
5.2 Grafos divididos	18
5.3 Condição sobre os blocos de um grafo	19
5.4 Grafos exoplanares	21
5.5 Outras classes	22
6 Abordagem algorítmica	24

6.1	Árvores	24
6.1.1	Caminho mais longo	24
6.1.2	Vértice de Gallai	25
6.2	Outros resultados	27
7	Conclusão	28
	Referências	29

Lista de figuras

3.1	Grafo de Petersen	7
3.2	Grafo de Walther com 25 vértices	8
3.3	Grafo de Walther e Zamfirescu com 12 vértices	8
3.4	Processo para encontrar o exemplo de Walther e Zamfirescu	9
3.5	Grafo planar de Schmitz com 17 vértices	10
3.6	Menores exemplos de grafos 2-conexos sem vértice de Gallai	11
3.7	Menor grafo 3-conexo sem vértice de Gallai	11
4.1	Exemplo de um grafo de Mark	15
5.1	Exemplo de um grafo dividido.	18
5.2	Grafo G e sua árvore de bloco $T(G)$	20
5.4	Circuito $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$	20
5.5	Circuito C e vértices x, y e v	21
5.6	Circuito C e caminhos P e P'	21
5.7	Circuito C e caminhos P_1, P_2 e P'	22
6.1	Exemplo de execução do Algoritmo 2	26

Capítulo 1

Introdução

Esta monografia se insere na área de teoria dos grafos, e tem como foco problemas sobre caminhos mais longos em grafos. Um fato bem conhecido a respeito de caminhos mais longos num grafo conexo é o de que quaisquer dois deles têm um vértice em comum. Em 1966, num colóquio na Hungria, [GALLAI \(1968\)](#) questionou se esse fato continua verdadeiro quando se considera todos os caminhos mais longos em um grafo conexo. Logo depois, [WALTHER \(1969\)](#) mostrou que a resposta a essa questão é negativa. Desde então, diversas classes de grafos têm sido estudadas a esse respeito e para algumas delas sabe-se que a resposta é positiva. Num grafo, um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos é chamado *vértice de Gallai*, e um grafo que possui vértice de Gallai é chamado *grafo de Gallai*. Dentre os grafos de Gallai, destacam-se árvores, cactos, grafos split ([KLAVŽAR e PETKOVŠEK \(1990\)](#)), grafos arco-circulares ([BALISTER et al. \(2004\)](#) e [JOOS \(2015\)](#)), grafos exoplanares e 2-árvores ([REZENDE et al. \(2013\)](#)), grafos série-paralelos ([G. CHEN et al. \(2017\)](#)), grafos dualmente cordais ([JOBSON et al. \(2016\)](#)), grafos 2K2-livres ([GOLAN e SHAN \(2018\)](#)), além de outros ([CERIOLI e LIMA \(2020\)](#)). Contudo, não se conhece um resultado geral que captura muitos tipos de grafos.

Naturalmente, surgem outros problemas relacionados à pergunta de Gallai. Como por exemplo, o problema sobre a interseção de quaisquer k caminhos mais longos, onde k é um inteiro maior que 2. Embora a prova para o caso $k = 2$ seja bem simples, o caso $k = 3$ ainda não foi resolvido. Conjectura-se que a resposta para o caso $k = 3$ seja positiva. Os primeiros resultados sobre este caso surgiram na literatura há cerca de 15 anos, mas estes são restritos a classes especiais de grafos e ainda não são muitos.

O objetivo desse trabalho é apresentar uma resenha sobre o problema da interseção de caminhos mais longos em grafos, abordando não só o caso de todos os caminhos mais longos, mas também o caso em que são considerados um número fixo de tais caminhos. Essas questões serão investigadas em grafos arbitrários e em classes especiais de grafos, pois sabemos que a resposta para a primeira questão no caso de grafos arbitrários é negativa; e a segunda questão é um problema em aberto. Apresentaremos alguns resultados conhecidos e reproduziremos as provas de alguns deles. Além disso, faremos uma breve abordagem algorítmica sobre a questão de encontrar um caminho mais longo num grafo e o de encontrar um vértice de Gallai.

No Capítulo 2 apresentamos conceitos básicos da teoria dos grafos que são essenciais para a compreensão desta monografia. Estabelecemos a notação que será usada e definimos diversas classes de grafos que serão abordadas na monografia. No Capítulo 3 apresentamos a pergunta de Gallai que motivou grande parte dos resultados da literatura e exibimos grafos ou classes de grafos que não possuem vértice de Gallai. No Capítulo 4 nosso foco são classes de grafos que possuem um vértice na interseção de um número fixo de caminhos. Já no Capítulo 5 apresentamos diversas classes de grafos que possuem vértice de Gallai, mencionamos vários resultados conhecidos na literatura e reproduzimos as provas de alguns deles. Por fim, no Capítulo 6 abordamos questões algorítmicas sobre caminhos mais longos, apresentamos alguns algoritmos conhecidos e mencionamos outros resultados.

Capítulo 2

Conceitos básicos da teoria dos grafos

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre grafos e estabelecemos a notação a ser usada. A terminologia que adotamos segue de perto a do livro Graph Theory de **BONDY e MURTY (2008)**.

Um grafo G é um par ordenado (V, E) onde V e E são conjuntos disjuntos. Os elementos de V são chamados *vértices*, e os elementos de E , chamados *arestas*, correspondem a um par não-ordenado de elementos distintos de V .

Quando o nome de um grafo está claro pelo contexto, e este nome é G , por exemplo, então denotamos por $V(G)$ o seu conjunto de vértices, e denotamos por $E(G)$ o seu conjunto de arestas.

Grafos finitos são aqueles que possuem um número finito de vértices e arestas. Neste trabalho abordaremos somente esse tipo de grafo. A *ordem* de um grafo G é definida como a cardinalidade de $V(G)$. Chamamos de *tamanho* de G a soma $|V(G)| + |E(G)|$. Um grafo sem nenhum vértice (e sem nenhuma aresta) é chamado *grafo nulo*. Um grafo com apenas um vértice é chamado *trivial*.

Por simplicidade, denotamos um par não-ordenado de vértices $\{u, v\}$ por uv . Se $e = uv$ é uma aresta de um grafo, dizemos que e *incide em* u e em v ; que e *vai de* u para v ou que e *liga* os vértices u e v . Além disso, dizemos que u e v são *extremos* de e ; que u e v são *adjacentes* (ou vizinhos) e que u é *adjacente* a v . O conjunto de vizinhos de um vértice v no grafo G é denotado por $N_G(v)$, ou simplesmente $N(v)$, se não houver ambiguidade.

O *grau* de um vértice v em um grafo G , denotado por $d_G(v)$, é o número de arestas de G que incidem em v . Um vértice é dito *isolado* se tem grau zero. Um vértice é dito *dominante* se é vizinho de todos os vértices do grafo. Pares de vértices não adjacentes são ditos *independentes*. Um conjunto de vértices dois a dois independentes é chamado de conjunto *independente* ou *estável*.

Um *vértice universal* é um vértice de um grafo G que é adjacente a todos os demais vértices de G .

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Neste caso, dizemos que G é *supergrafo* de H , que H *está contido* em G ou que G *contém* H , e

escrevemos $H \subseteq G$. Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$, então dizemos que H é um *subgrafo próprio* de G e escrevemos $H \subset G$. Note que qualquer grafo é subgrafo e supergrafo dele mesmo.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq Y \subseteq V(G)$, então o *subgrafo de G induzido* ou *gerado por Y* , denotado por $G[Y]$, é um subgrafo H de G tal que $V(H) = Y$ e $E(H)$ é precisamente o conjunto das arestas de G que tem ambos os extremos em Y . Se $\emptyset \neq F \subseteq E(G)$, então o *subgrafo de G induzido* ou *gerado por F* , denotado por $G[F]$ é um subgrafo H de G tal que $A(H) = F$ e $V(H)$ é o conjunto dos vértices de G que são extremos das arestas em F .

Se G é um grafo e B é um conjunto de vértices (ou arestas) de G , o subgrafo de G obtido ao remover todos os vértices (ou arestas) de B é denotado por $G - B$. Por simplicidade, escrevemos $G - b$ em vez de $G - \{b\}$.

Um *grafo completo* é um grafo em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. Denotamos por K_n um grafo completo com n vértices. Subgrafos completos de um grafo recebem o nome especial de *cliques*. Uma clique com k vértices é chamada *k-clique*.

Um *passeio* em um grafo G é uma sequência $W := (v_0, v_1, \dots, v_l)$, em que $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq l$. Se $v_0 = x$ e $v_l = y$, dizemos que W é um *passeio de x para y* , e que W *passa* pelos vértices v_0, v_1, \dots, v_l . Os vértices x e y são chamados de *extremos* do passeio, x é chamado *origem* e y é chamado *término* de W . Os vértices v_1, v_2, \dots, v_{l-1} são chamados de *vértices internos* de W . O *comprimento* de W , denotado por $|W|$ é o número de arestas de W .

Um *caminho* é um passeio cujos vértices são dois a dois distintos. Um *circuito* é um passeio em que a origem e o término são os mesmos e todos os demais vértices são dois a dois distintos. Um *caminho hamiltoniano* em um grafo G é um caminho que passa por todos os vértices de G . Um *circuito hamiltoniano* é um circuito que passa por todos os vértices de G . Dois circuitos são *independentes* se não possuem nenhum vértice ou aresta em comum.

Denotamos por C_n um circuito com n vértices e P_n um caminho com n vértices.

Se $P := (v_0, v_1, \dots, v_l)$ é um passeio, então definimos $P^{-1} := (v_l, v_{l-1}, \dots, v_1, v_0)$ como o passeio inverso de P . Se P é um passeio com término num vértice v e Q é um passeio com início em v , então $P \cdot Q$ denota a *concatenação de P e Q* , definida como a concatenação das sequências que definem P e Q nessa ordem. Por simplicidade, se u é um vértice adjacente a v , denotamos $P \cdot (vu)$ por Pu , e $(uv) \cdot Q$ por uQ . Se C é um circuito, e u e v são vértices distintos de C , denotamos por C_{uv} o caminho que é uma subsequência da sequência que define C , que vai do vértice u ao vértice v . Nas figuras, dada uma representação de C , o caminho C_{uv} é o que se obtém percorrendo C no sentido horário de u para v .

Se P é um *passeio*, quando conveniente também nos referimos a P como um grafo (ou subgrafo) induzido pelas arestas de P , e denotamos por $V(P)$ e $E(P)$ o conjunto de seus vértices e suas arestas, respectivamente.

A *união* de dois grafos G e H é o grafo $G \cup H$ com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$. A *interseção* $G \cap H$ de G e H é definida analogamente. Dois grafos se *intersectam* se têm interseção não vazia. Dois grafos são ditos *disjuntos* se têm interseção vazia. Se G e H são grafos disjuntos, nos referimos à união deles como *união disjunta*.

Um grafo G é *conexo* se, para todo par de vértices distintos u e v , existe em G um

caminho de u a v . Um grafo é k -conexo, com $k > 1$, se, para todo par de vértices distintos u e v existem k caminhos internamente disjuntos de u a v em G .

Um grafo ou subgrafo G é dito *maximal* em relação à uma propriedade \mathcal{P} se G tem a propriedade \mathcal{P} , mas nenhum supergrafo próprio de G tem a propriedade \mathcal{P} . Um grafo ou subgrafo G é dito *minimal* em relação à uma propriedade \mathcal{P} se G tem a propriedade \mathcal{P} , mas nenhum subgrafo próprio de G tem a propriedade \mathcal{P} .

Os subgrafos conexos maximais de um grafo G são chamados *componentes*. O número de componentes de G é denotado por $c(G)$.

Um *emparelhamento* num grafo G é um subconjunto de arestas de G que são duas a duas não adjacentes. O *número de emparelhamento* de G é o número de arestas de um emparelhamento máximo em G .

Uma *aresta de corte* de um grafo G é uma aresta e de G tal que $c(G - e) > c(G)$. Um *vértice de corte* de um grafo G é um vértice v tal que $c(G - v) > c(G)$.

Se G é um grafo, um *bloco* de G é um subgrafo conexo maximal de G que não possui vértices de corte. Assim, um *bloco* de G , onde G é não trivial, é um subgrafo 2-conexo maximal ou um K_2 . Um *bloco trivial* é um K_2 ou um vértice isolado. Quando G é conexo e não tem vértices de corte então também dizemos que G é um bloco.

Para um bloco não trivial β de um grafo G , um caminho P em G com $|P| \geq 1$ que intersecta β em um único vértice é chamado de *caminho pendente* de β ; tal vértice único é denominado sua *origem*.

O *número ciclomático* de um grafo G é definido como $|E(G)| - |V(G)| + 1$ e também é conhecido como *nulidade* de G .

Se G é um grafo, vamos denotar por $\mathcal{P}(G)$ o conjunto de todos os caminhos mais longos de G .

Classes especiais de grafos

Chamamos de *classes de grafos* um conjunto de grafos que satisfazem determinadas propriedades. Definiremos a seguir algumas classes de grafos que serão abordadas neste trabalho.

Um grafo é uma *árvore* se é conexo e não contém circuitos.

Um grafo G é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , com $X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$ tal que cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y . Essa partição (X, Y) é chamada de *bipartição* do grafo. Denotamos por $K_{m,n}$ um grafo bipartido completo em que um dos conjuntos da bipartição possui m vértices e o outro n vértices.

Um grafo G é um *cacto* se é conexo e cada aresta pertence a no máximo um circuito de G . Num cacto cada bloco é um circuito ou uma aresta.

Um *grafo de blocos* é um grafo conexo no qual todos os seus blocos são cliques.

Um *grafo planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano sem que haja cruzamento de suas arestas. Um tal desenho é chamado uma *imersão plana*.

Um grafo é *exoplanar* se admite uma imersão plana na qual todos os seus vértices pertencem à fronteira da face externa. Note que todo cacto é exoplanar.

Um grafo G é *k-exoplanar* se G é exoplanar quando $k = 1$ e para $k > 1$, G possui uma imersão no plano em que a remoção de todos os vértices pertencentes à fronteira da face externa resulta em um grafo $(k - 1)$ -exoplanar.

Um grafo G é *hamiltoniano-conexo* se para todo par de vértices distintos u e v em G existe um caminho hamiltoniano de u a v em G .

Um grafo G é *dividido* (ou *split*) se existe uma partição de $V(G)$ em dois conjuntos X e Y tal que X induz uma clique e Y é um conjunto independente.

Seja $k \geq 1$ um inteiro. Um grafo G é uma *k-árvore* se G é um grafo completo com $k + 1$ vértices ou se G contém mais de $k + 1$ vértices, então G contém um vértice cujo conjunto de vizinhos em G induz uma k -clique e cuja remoção resulta em uma k -árvore. Em outras palavras, G tem ordem $n \geq k + 1$, sendo que quando $n = k + 1$ então G é um grafo completo com $k + 1$ vértices, e quando $n > k + 1$ então G pode ser obtido acrescentando-se um novo vértice a uma k -árvore de ordem $n - 1$ e conectando-o a uma k -clique qualquer dessa k -árvore.

Um *grafo de Gallai* é um grafo que contém um vértice v que pertence a todos os seus caminhos mais longos. Um tal vértice v é chamado de *vértice de Gallai*.

Muitas outras classes de grafos são mencionadas ao longo deste trabalho, mas não são definidas aqui. Como não são abordadas em profundidade, mas são apenas mencionadas para exemplificar classes de grafos que satisfazem ou não certas propriedades relativas a caminhos mais longos, optamos pela omissão. Porém, indicamos aqui a URL da ISGCI, uma enciclopédia de classes de grafos que o leitor poderá consultar para obter não apenas as definições, mas várias outras informações sobre tais classes. Veja em

<https://www.graphclasses.org/>

Nessa URL consta que: “ISGCI (Information System on Graph Classes and their Inclusions) is an encyclopaedia of graphclasses with an accompanying java application that helps you to research what’s known about particular graph classes”.

Capítulo 3

Grafos sem vértice de Gallai

Sabemos que um grafo pode ter mais de um caminho mais longo. O que podemos afirmar sobre a interseção de tais caminhos? É bem conhecido o fato (fácil de provar) de que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo têm um vértice comum. Outro fato conhecido é que quaisquer dois circuitos mais longos em grafos 2-conexos têm um vértice comum. Gallai perguntou em 1966, durante um colóquio na área de teoria dos grafos, se a existência de um vértice comum continua verdadeira quando se considera todos os caminhos mais longos em um grafo conexo (GALLAI, 1968). Esta pergunta, apresentada a seguir, motivou muitas pesquisas desde então.

Pergunta 1 (Pergunta de Gallai). *É verdade que todos os caminhos mais longos de um grafo conexo possuem um vértice comum?*

Lembramos que um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos de um grafo é chamado de vértice de Gallai. É natural pensar na pergunta análoga, em relação a todos os circuitos mais longos de um grafo 2-conexo. Contudo, nessa época já era conhecido um exemplo de grafo 2-conexo em que todos os circuitos mais longos não têm um vértice comum. Referimo-nos aqui ao grafo de Petersen (veja a Figura 3.1), que viria a se tornar muito mais conhecido pelo fato de ser um contraexemplo para diversas conjecturas.

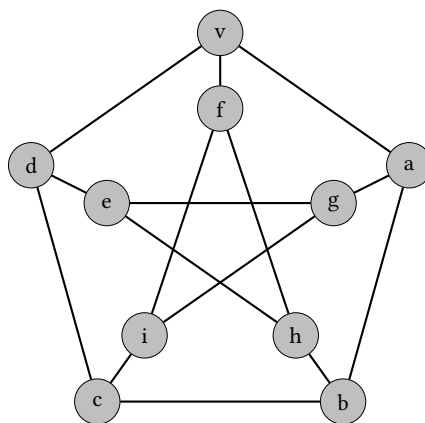


Figura 3.1: Grafo de Petersen

Sabe-se que o grafo de Petersen é hipo-hamiltoniano, ou seja, não é hamiltoniano, mas o grafo obtido dele pela remoção de qualquer um de seus vértices é hamiltoniano. Até então não se conhecia um exemplo similar para o caso de todos os caminhos mais longos, mas um tal exemplo foi encontrado.

3.1 Primeiro exemplo

Pouco tempo depois da pergunta de Gallai, [WALTHER \(1969\)](#) provou que a resposta a essa pergunta é negativa, exibindo um grafo planar conexo de ordem 25 sem vértice de Gallai (veja a Figura 3.2).

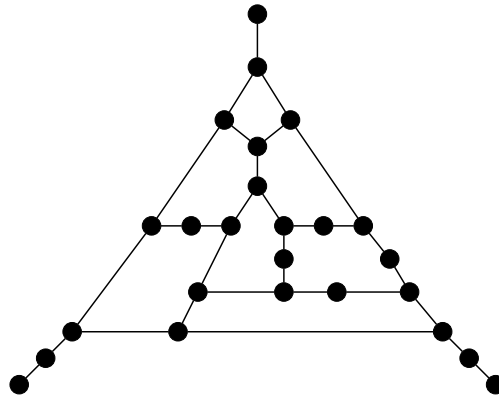


Figura 3.2: Grafo de Walther com 25 vértices

Esse resultado deu origem a novos questionamentos. Esse é o grafo de menor ordem com essa propriedade? E se forem impostas outras restrições como planaridade e/ou conectividade mais alta?

3.2 Exemplo de menor ordem

Alguns anos depois do primeiro exemplo, [VOSS e WALTHER \(1974\)](#) e [ZAMFIRESCU \(1976\)](#), independentemente, encontraram um exemplo com 12 vértices, que chamaremos de grafo WZ (veja a Figura 3.3). Esse é o menor grafo conhecido que não tem vértice de Gallai.

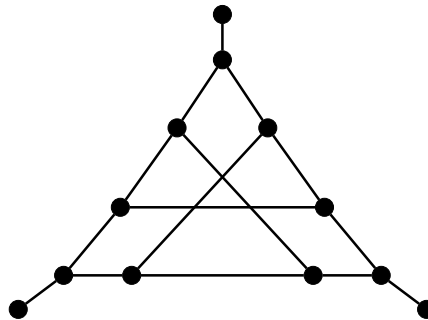


Figura 3.3: Grafo de Walther e Zamfirescu com 12 vértices

O grafo WZ pode ser obtido a partir do grafo de Petersen procedendo da seguinte forma. Tome um vértice v qualquer do grafo de Petersen e faça uma subdivisão em cada uma das 3 arestas incidentes a v , inserindo os vértices v_1, v_2, v_3 . A seguir, remova o vértice v . Note que, rearranjando os vértices do grafo obtido, obtemos o grafo WZ exibido na Figura 3.3.

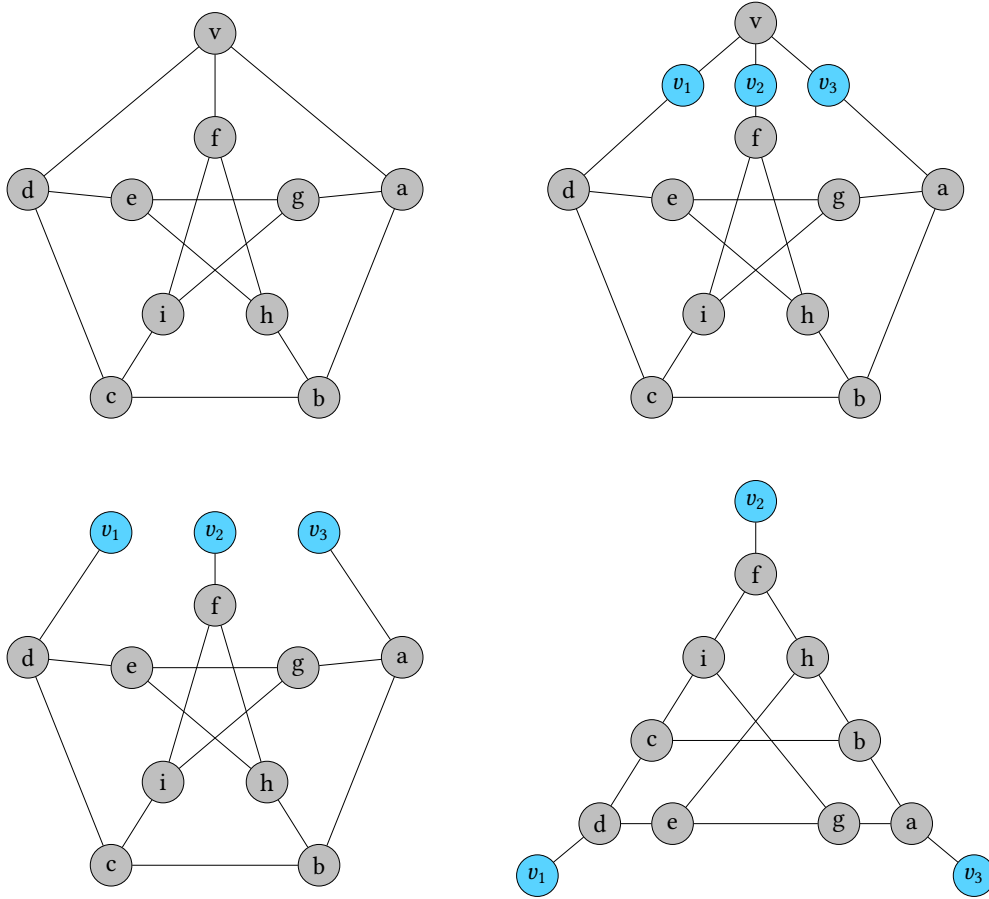


Figura 3.4: Processo para encontrar o exemplo de Walther e Zamfirescu

Pela construção feita, é fácil notar que no grafo WF não existe vértice de Gallai. Observe que um caminho mais longo no grafo WF necessariamente não passa por um dos vértices de grau 1. Se existisse um caminho mais longo que passa por todos os demais vértices, então esse caminho corresponderia a um circuito hamiltoniano no grafo de Petersen, o que é um absurdo. Portanto, um caminho mais longo no grafo WF tem no máximo 10 vértices. Para cada um dos 9 vértices de grau maior que 1, construa o caminho correspondente ao circuito mais longo do grafo de Petersen que não passa por esse vértice. Os caminhos resultantes têm 10 vértices e portanto são caminhos mais longos. Assim, esses 9 caminhos não possuem um vértice em comum. Os 9 caminhos mais longos cuja interseção é vazia são:

- 1) $v_2 - f - i - g - e - h - b - c - d - v_1$;
- 2) $v_3 - a - i - f - g - d - e - h - c - v_2$;
- 3) $v_1 - b - e - h - i - f - g - d - a - v_3$;
- 4) $v_1 - b - e - h - c - g - f - i - a - v_3$;

- 5) $v_3 - a - d - g - c - h - i - f - b - v_1$;
- 6) $v_2 - c - g - d - a - i - h - e - b - v_1$;
- 7) $v_1 - b - f - i - a - d - e - h - c - v_2$;
- 8) $v_3 - a - i - f - b - e - d - g - c - v_2$;
- 9) $v_2 - c - h - e - b - f - g - d - a - v_3$.

Os 3 primeiros caminhos são simétricos e não passam por: a e v_3 ; b e v_1 ; c e v_2 , nesta ordem. Os 6 últimos também são simétricos e não passam por: d ; e ; f ; g ; h ; i , nesta ordem.

3.3 Exemplos planares

O primeiro exemplo de Walther com 25 vértices é planar, contudo ele não é o menor exemplo planar conhecido. Em 1975, Schmitz encontrou um grafo planar com 17 vértices, o menor grafo planar conhecido sem vértice de Gallai.

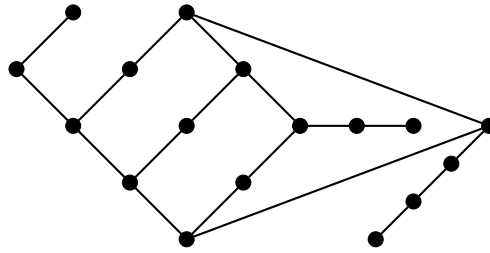


Figura 3.5: Grafo planar de Schmitz com 17 vértices

ZAMFIRESCU (1975) conjecturou que esses grafos anteriores que exibimos são contraexemplos de menor ordem possível para a pergunta de Gallai no caso geral e no caso planar.

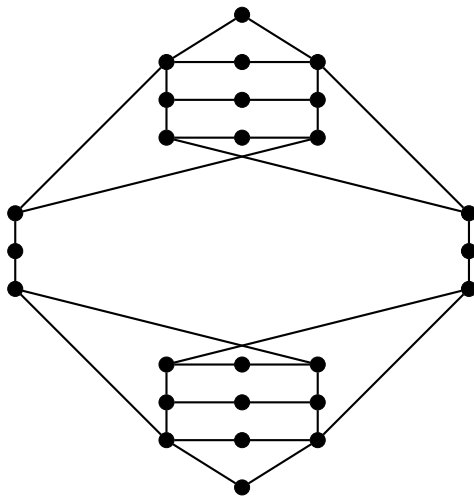
3.4 Grafos k -conexos

Outra pergunta natural que surge é em relação à conectividade dos grafos. É possível encontrar contraexemplos quando exigimos conectividade mais alta?

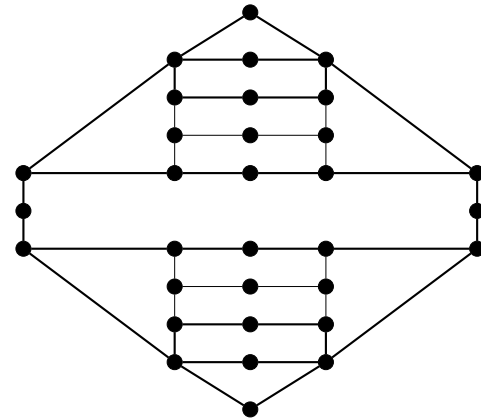
Pergunta 2. Para quais valores de k existem grafos k -conexos sem vértice de Gallai?

3.4.1 Grafos 2-conexos

Em 1972, **ZAMFIRESCU (1972)** construiu o primeiro exemplo para grafos 2-conexos, que é planar (com 82 vértices). Quatro anos depois, **ZAMFIRESCU (1976)** encontrou os exemplos com menor quantidade de vértices conhecidos até hoje, para grafos 2-conexos (com 26 vértices) e para grafos 2-conexos planares (com 32 vértices).



(a) Menor grafo 2-conexo conhecido que não possui vértice de Gallai.



(b) Menor grafo 2-conexo planar conhecido que não possui vértice de Gallai.

Figura 3.6: Menores exemplos de grafos 2-conexos sem vértice de Gallai

3.4.2 Grafos 3-conexos

[HORTON \(1973\)](#) construiu um grafo 3-conexo com 40 vértices que não possui vértice de Gallai. Pouco depois, [ZAMFIRESCU \(1976\)](#) encontrou um outro exemplo menor, com 36 vértices (veja a Figura 3.7).

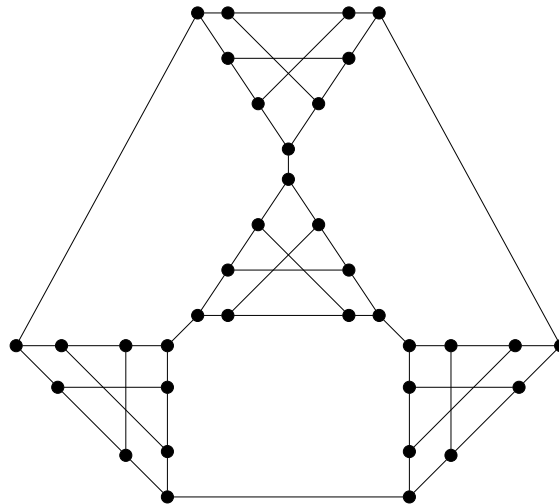


Figura 3.7: Menor grafo 3-conexo sem vértice de Gallai

Já para grafos 3-conexos planares, [GRÜNBAUM \(1974\)](#) obteve o primeiro exemplo com 484 vértices. O menor exemplo que é 3-conexo e planar foi obtido por [HATZEL \(1979\)](#) e tem 224 vértices.

3.4.3 Grafos 4-conexos

Para $k = 4$, a Pergunta 2 continua em aberto. Não se conhecem grafos 4-conexos sem vértices de Gallai. Mas quando se exige planaridade, sabe-se que a resposta é negativa,

pois o conhecido Teorema de Tutte (**TUTTE (1956)**) afirma que qualquer grafo planar 4-conexo é hamiltoniano.

Capítulo 4

Grafos com vértice na interseção de um número fixo de caminhos

O que sabemos sobre a interseção de um número fixo k de caminhos mais longos em um grafo conexo? Estudos posteriores aos resultados do Capítulo 3 levaram à uma pergunta análoga a de Gallai, mas quando se considera quaisquer k caminhos mais longos, onde $k > 2$. Quando $k = 2$, como mencionamos anteriormente, a resposta é bem conhecida: neste caso, a interseção é não vazia (veremos essa prova na seção 4.1).

Pergunta 3. *Há inteiros positivos $k > 2$ para os quais há exemplos de grafos com k caminhos mais longos que não possuem um vértice em comum?*

O grafo apresentado na Seção 3.3 é um exemplo para $k = 7$. Mas uma resposta mais abrangente foi obtida por SKUPIEŃ (1996). Para todo $k \geq 7$, Spukien obteve um grafo conexo no qual existem k caminhos mais longos com interseção vazia e quaisquer $k - 1$ caminhos mais longos possuem um vértice em comum. Com isso, a resposta à Pergunta 3 é positiva para $k \geq 7$, mas continua desconhecida para $3 \leq k \leq 6$.

4.1 Dois caminhos mais longos

O resultado mais conhecido é sobre a interseção de quaisquer 2 caminhos. O teorema a seguir é bem conhecido e fácil de provar.

Teorema 1. *Quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem pelo menos um vértice comum.*

Prova. Seja G um grafo conexo e sejam P e Q dois caminhos mais longos em G . Suponha por contradição que a interseção de P e Q é vazia. Como G é conexo, existe um caminho de algum vértice de P a algum vértice de Q . Seja R um tal caminho de comprimento mínimo e suponha que R tenha início em $u \in P$ e término em $v \in Q$. Neste caso, u divide P em dois caminhos P_1 e P_2 , e v divide Q em dois caminhos Q_1 e Q_2 . Dessa forma, $P = P_1 \cdot P_2$, e $Q = Q_1 \cdot Q_2$.

Se $|P_1| \geq |P_2|$, seja $\tilde{P} = P_1$; caso contrário, seja $\tilde{P} = P_2^{-1}$. Se $|Q_1| \geq |Q_2|$, seja $\tilde{Q} = Q_1^{-1}$; caso contrário, seja $\tilde{Q} = Q_2$.

Neste caso, o caminho $M = \tilde{P} \cdot R \cdot \tilde{Q}$, é tal que $|M| > |P|$, o que é uma contradição à escolha de P e Q como caminhos mais longos. \square

Também é um fato bem conhecido que em grafos 2-conexos, quaisquer dois circuitos mais longos têm um vértice comum.

GRÖTSCHEL (1984) apresentou a seguinte conjectura sobre circuitos mais longos em grafos k -conexos.

Conjectura 1. *Em todo grafo k -conexo, $k \geq 2$, quaisquer dois circuitos mais longos têm k vértices em comum.*

Essa conjectura já foi verificada para $k \leq 8$. Em sua dissertação de mestrado, REZENDE (2014) apresenta a prova para os casos $k \leq 8$. Para $k > 8$ a conjectura permanece em aberto.

Com relação a caminhos mais longos, HIPPCHEN (2008) conjecturou que a afirmação equivalente para caminhos mais longos é verdadeira.

Conjectura 2. *Em todo grafo k -conexo, $k \geq 2$, quaisquer dois caminhos mais longos têm k vértices em comum.*

A Conjectura 2 continua em aberto para o caso geral. Em 2021, GUTIÉRREZ (2021) mostrou que todo par de caminhos mais longos em grafos k -conexos com n vértices se intersecta em pelo menos $\min\{n, (8k - n + 2)/5\}$ vértices. Além disso, também mostrou que em grafos 4-conexos, todo par de caminhos mais longos se intersecta em pelo menos 4 vértices. Com isso, Gutiérrez verificou que a conjectura de Hippchen vale para $k \leq 4$ ou $k \geq (n - 2)/3$.

4.2 Três caminhos mais longos

Conjectura-se que a resposta para o caso $k = 3$ da Pergunta 3 seja positiva, contudo, os resultados obtidos a este respeito são restritos a poucas classes especiais de grafos.

Conjectura 3. *Em todo grafo conexo quaisquer três caminhos mais longos possuem um vértice em comum.*

4.2.1 Grafos exoplanares

Em 2009, AXENOVICH (2009) provou que a Conjectura 3 é verdadeira para a classe dos grafos exoplanares. Mais especificamente, para triplas de caminhos mais longos cuja união forma um grafo exoplanar. Esse foi um dos primeiros resultados sobre a Conjectura 3 obtidos na literatura. O resultado provado por Axenovich, mais formalmente é o seguinte:

Teorema 2. *Seja G um grafo conexo e P_1, P_2, P_3 caminhos mais longos de G . Se $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ forma um grafo exoplanar, então existe um vértice v tal que $v \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$.*

A técnica principal desenvolvida e utilizada na prova do Teorema 2 considera um contraexemplo minimal no qual três caminhos mais longos não têm um vértice em comum.

Define configurações que não ocorrem quando se considera a união de três caminhos mais longos, mostrando que se elas não ocorrem, então é possível construir um caminho de comprimento maior que o mais longo. Esse método pode ser utilizado para as classes de grafos que são fechadas sob operações de remoção ou contração de arestas, que é o caso dos grafos exoplanares. Axenovich provou que um contraexemplo minimal possui apenas um bloco não trivial. Não reproduziremos a prova de Axenovich para o Teorema 2 que é relativamente longa. Além disso, esse teorema segue como corolário de um teorema mais geral provado por REZENDE *et al.*, 2013, conforme mencionamos na próxima subseção.

4.2.2 Grafos conexos cujos blocos não triviais são hamiltonianos

REZENDE *et al.* (2013) mostraram que a Conjectura 3 é verdadeira para grafos conexos cujos blocos não triviais são hamiltonianos. Como essa classe inclui os grafos exoplanares, esse resultado generaliza o Teorema 2.

Teorema 3. *Se G é um grafo conexo em que todos os blocos não triviais são hamiltonianos, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.*

4.2.3 Grafos de Mark

Em sua tese de doutorado, MARK (2022) mostrou que a Conjectura 3 é verdadeira se G é um grafo com n vértices e no máximo $n + 5$ arestas, ou seja, quando G é a união de uma árvore com no máximo mais 6 arestas (veja a Figura 4.1). Mark enuncia esse resultado em termos do número ciclomático de um grafo. Ele se baseia no fato (veja BERGE (2001)) de que o número máximo de circuitos independentes de um grafo G é exatamente o número ciclomático de G .

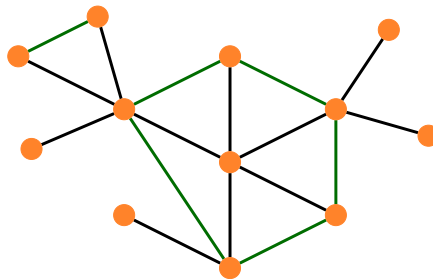


Figura 4.1: Exemplo de um grafo de Mark

Teorema 4. *Se G é um grafo conexo com número ciclomático no máximo 6, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.*

Para provar esse teorema, Mark considera um contraexemplo minimal (em relação às arestas) H para o Teorema 4 e mostra que esse grafo tem pelo menos 7 circuitos independentes. O grafo H é a união de três caminhos mais longos, digamos P_1, P_2, P_3 que não têm vértice em comum. Mark usa um resultado de AXENOVICH (2009) para mostrar que H possui um conjunto \mathcal{C} de pelo menos 6 circuitos, dois em cada união $P_i \cup P_j$, $1 \leq i < j \leq 3$ de seus três caminhos mais longos. Após isso, mostra que existe um sétimo circuito C que não está contido em nenhuma união $P_i \cup P_j$, $i \neq j$. Além disso, prova que quaisquer

três, quatro, cinco ou seis dos circuitos em \mathcal{C} são independentes, e conclui que o sétimo circuito C também é independente dos demais circuitos de \mathcal{C} . A existência de 7 circuitos independentes em H é uma contradição, pois H tem número ciclomático no máximo 6.

Mark também desenvolveu métodos computacionais que verificam o Teorema 4 de maneira independente da prova que fez.

Capítulo 5

Grafos com vértice de Gallai

No Capítulo 3 vimos algumas classes de grafos que não têm vértice de Gallai, respondendo negativamente à Pergunta 1 (de Gallai). Apesar da resposta para a Pergunta 1 ser negativa no caso geral, são conhecidas algumas classes de grafos que têm vértice de Gallai. Neste capítulo apresentamos algumas delas.

5.1 Árvores

Árvores são grafos bem simples e bem estudados, o que as torna objeto de estudo para a maioria dos problemas. Assim, é natural perguntar se têm um vértice de Gallai. A seguir vamos provar um resultado mais geral sobre árvores.

Teorema 5. *Seja T uma árvore e seja \mathcal{S} um conjunto de subárvores de T . Se quaisquer duas das subárvores de \mathcal{S} têm um vértice em comum, então existe um vértice comum a todas elas.*

Prova. Seja T uma árvore com n vértices. Vamos provar por indução em n que existe um vértice v tal que $v \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$. Se $n = 1$, o resultado é trivial.

Suponha que o resultado vale para toda árvore com no máximo $n - 1$ vértices. Suponha então que $n \geq 2$. Como toda árvore (não trivial) possui pelo menos duas folhas, então tome uma folha u em T . Considere os dois casos a seguir.

Caso 1: Existe uma árvore em \mathcal{S} que consiste somente do vértice u . Neste caso, u pertence à interseção de todas as subárvores de \mathcal{S} , uma vez que duas a duas todas se intersectam em pelo menos um vértice.

Caso 2: Se o caso 1 não ocorre, então seja w o vértice adjacente a u em T . Seja $\mathcal{S}' := \{S - u \mid S \in \mathcal{S}\}$. Note que toda subárvore S de T que contém u propriamente é tal que $S - u$ contém w . Seja $T' := T - u$, então \mathcal{S}' é um conjunto de subárvores de T' tal que quaisquer duas delas se intersectam em algum vértice. Pela hipótese de indução, $\bigcap_{S' \in \mathcal{S}'} S' \neq \emptyset$, e portanto $\bigcap_{S \in \mathcal{S}} S = \bigcap_{S' \in \mathcal{S}'} S' \neq \emptyset$. \square

Corolário 1. *Se T é uma árvore, então todos os caminhos mais longos de T têm pelo menos um vértice em comum.*

Prova. Tomando \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos mais longos de T , o resultado segue pelo Teorema 1 e pelo Teorema 5. \square

O Teorema 5 é um caso especial de um teorema mais geral que diz respeito à Propriedade Helly.

Propriedade 1 (Propriedade Helly). *Seja \mathcal{C} uma coleção de subconjuntos. Dizemos que \mathcal{C} tem a propriedade Helly quando qualquer subcoleção de \mathcal{C} formada por subconjuntos que se intersectam dois a dois contém um elemento em comum.*

O Teorema 5 prova que um conjunto de subárvores de uma árvore possui a propriedade Helly.

5.2 Grafos divididos

KLAVŽAR e PETKOVŠEK (1990) provaram que grafos divididos possuem um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos.

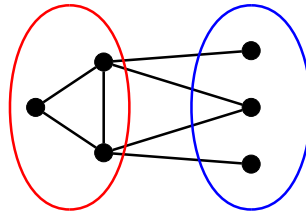


Figura 5.1: Exemplo de um grafo dividido.

Teorema 6. *Todo grafo dividido conexo tem vértice de Gallai.*

Prova. Seja G um grafo dividido conexo, e seja \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos mais longos de G . Seja $V(G) = K \cup S$, tal que K induz uma clique e S é um conjunto independente com $|S|$ maior possível. Se $K = \emptyset$, então pela conexidade de G temos que S possui apenas um vértice. Logo, $G = K_1$ e o resultado vale.

Suponha então que $K \neq \emptyset$. Seja $P \in \mathcal{P}$ um caminho mais longo de G . Suponha que existe um vértice $x \in K$, tal que x não pertence a P .

Sabemos que ambos os extremos de P pertencem a S , pois caso contrário, existiria um caminho mais longo que P . Seja então $P = P'(uv)$, tal que $u \in K$ e $v \in S$. Pela escolha de S , sabemos que existe $y \in S$ tal que y é adjacente a x (se não, $S \cup \{x\}$ contradiz a escolha de S).

Se $y \notin P$, como $x, u \in K$, é possível construir o caminho $P'(uxy)$ que é mais longo que P , uma contradição. Se $y \in P$, então y possui pelo menos dois vizinhos em K que pertencem a P . Seja w um desses vizinhos. Assim, é possível construir um caminho maior que P trocando a aresta yw em P pelo caminho (y, x, w) .

Ambas as contradições ocorreram ao supor que $x \notin P$. Assim, temos que $x \in P$, para todo $x \in K$. Logo, $\emptyset \neq K \subseteq \bigcap \mathcal{P}$.

\square

5.3 Condição sobre os blocos de um grafo

No mesmo artigo de 1990 sobre grafos divididos, KLAVŽAR e PETKOVŠEK (1990) também apresentaram uma condição necessária e suficiente restrita aos caminhos mais longos que passam por um bloco de um grafo que garante a existência de um vértice de Gallai.

Teorema 7. *Seja G um grafo conexo e seja \mathcal{P} o conjunto de todos os seus caminhos mais longos. G tem vértice de Gallai se e somente se, para todo bloco B de G , todos os caminhos de \mathcal{P} que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice de Gallai.*

Seja \mathcal{P}_B o subconjunto de \mathcal{P} formado pelos caminhos que possuem pelo menos uma aresta de B . Assim, podemos reescrever o teorema anterior da seguinte maneira:

Se \mathcal{P} é o conjunto de todos os caminhos mais longos de um grafo G , então $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset \iff \bigcap \mathcal{P}_B \neq \emptyset$ para todo bloco B de G .

A necessidade da condição acima segue imediatamente do fato de que $\mathcal{P}_B \subseteq \mathcal{P}$ para todo bloco B em G .

A prova da suficiência dessa condição na realidade prova um teorema mais forte. O teorema a seguir é mais forte que o anterior pois \mathcal{P} não é necessariamente o conjunto de todos os caminhos mais longos de G .

Teorema 8. *Seja G um grafo conexo e seja \mathcal{P} um conjunto qualquer de caminhos mais longos. Se não existe um vértice comum a todos os caminhos de \mathcal{P} , então existe um bloco em G que contém ao menos uma aresta de cada caminho de \mathcal{P} .*

Ou seja, ou todos os caminhos de \mathcal{P} se intersectam ou existe um bloco B de G tal que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_B$.

Prova. A prova será feita em dois casos.

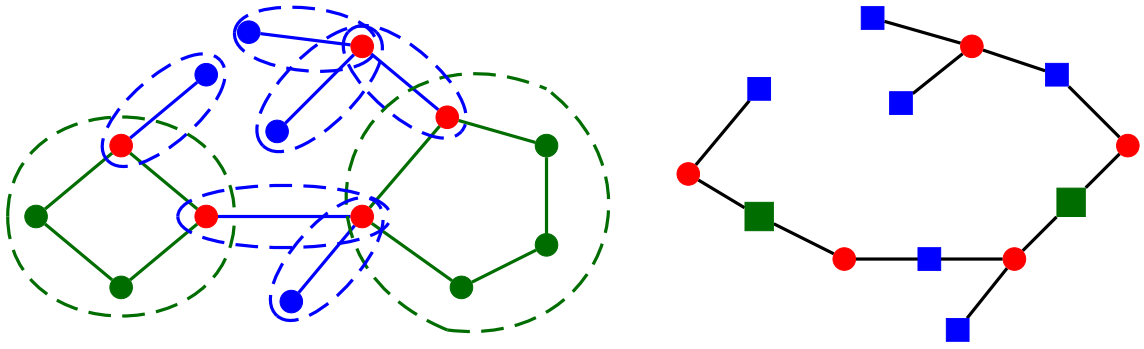
Caso 1: Para cada par de caminhos em \mathcal{P} existe um bloco que contém pelo menos uma aresta de ambos os caminhos.

Defina \mathcal{B} o conjunto de blocos de G e \mathcal{W} o conjunto de vértices de corte de G . Defina $T(G)$ a *árvore de blocos* associada a G tal que $V(T) = \mathcal{B} \cup \mathcal{W}$ e $E(T) = \{e \in E \mid e = (B, w), B \in \mathcal{B}, w \in \mathcal{W}, w \in B\}$. Ou seja, existe uma aresta com extremidade em $B \in \mathcal{B}$ e em $w \in \mathcal{W}$ se o vértice de corte w pertence ao bloco B .

Se P é um caminho em G , defina $f(P)$ como o caminho em $T(G)$ tal que um vértice $x \in T(G)$ pertence a $f(P)$ se e somente se x intersecta P . Ou seja, x é um vértice de corte que pertence a P ou x corresponde a um bloco de G que contém uma aresta de P . Denotamos por $f(P)$ a imagem de P em $T(G)$.

Defina $\mathcal{P}' := \{f(P) \mid P \in \mathcal{P}\}$. Sejam então $f(P_1), f(P_2) \in \mathcal{P}'$. Por hipótese, existe um bloco no qual P_1 e P_2 têm uma aresta em comum. Então $f(P_1)$ e $f(P_2)$ possuem um vértice em comum e se intersectam em $T(G)$. Isso vale para qualquer par de caminhos em \mathcal{P}' , logo, pelo Teorema 5, existe um vértice $v \in T(G)$ tal que $v \in \bigcap \mathcal{P}'$.

Se v é um vértice de corte, então $x \in \bigcap \mathcal{P}$. Se v corresponde a um bloco B de G , então $\mathcal{P} = \mathcal{P}_B$.



Os vértices de corte de G correspondem aos vértices vermelhos de $T(G)$, os blocos não triviais correspondem aos vértices verdes e os triviais correspondem aos vértices azuis.

Figura 5.2: Grafo G e sua árvore de bloco $T(G)$.

Caso 2: Existem dois caminhos $P, Q \in \mathcal{P}$ tais que não existe um bloco que contém pelo menos uma aresta de cada um.

Pelo Teorema 1, a interseção de P e Q é não nula. Nesse caso, P e Q têm exatamente um vértice em comum, pois caso contrário, ou teriam uma aresta em comum ou existiria um circuito em G formado por arestas de P e Q . Em ambos os casos existiria um bloco que contém aresta de P e Q . Assim, seja x o único vértice contido em $P \cap Q$. Queremos provar que $x \in \mathcal{P}$. Suponha por contradição que isso não ocorra, e suponha que $R \in \mathcal{P}$ não contém x .

Como quaisquer dois caminhos mais longos se intersectam em pelo menos um vértice, temos que $R \cap P \neq \emptyset$ e $R \cap Q \neq \emptyset$. Seja $y \in R \cap P$ tal que P_{xy} é mínimo, ou seja, não existe nenhum vértice interno de P_{xy} que pertence a R . Seja $z \in R \cap Q$ tal que Q_{xz} é mínimo. Como R não contém x , e x é o único vértice em $P \cap Q$, temos que $y \neq x \neq z$.

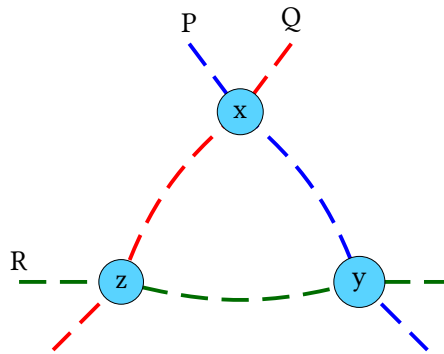


Figura 5.4: Circuito $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$

Dessa forma, temos que $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$ é um circuito, $|P_{xy}| \geq 1$ e $|Q_{zx}| \geq 1$. Assim, temos um bloco que contém pelo menos uma aresta de P e pelo menos uma aresta de Q , uma contradição. Portanto, todo caminho de \mathcal{P} contém x , ou seja $x \in \bigcap \mathcal{P}$. \square

5.4 Grafos exoplanares

REZENDE *et al.* (2013) generalizaram o resultado da Conjectura 3 para grafos exoplanares e provaram que grafos exoplanares têm vértice de Gallai.

Teorema 9. *Todo grafo exoplanar conexo tem vértice de Gallai.*

Prova. Seja G um grafo exoplanar conexo e \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos mais longos de G . Suponha por contradição que $\bigcap \mathcal{P} = \emptyset$.

Pelo Teorema 8, existe um bloco B que contém ao menos uma aresta de cada caminho em \mathcal{P} . Considere uma imersão plana de G tal que todos os vértices pertencem à fronteira de sua face externa.

Se B é um bloco trivial, então todos os caminhos em \mathcal{P} têm ao menos um vértice em comum. Suponhamos então que B é um bloco não trivial. Seja R^* um *caminho pendente* mais longo de B e seja v a origem de R^* . Vamos provar que todos os caminhos em \mathcal{P} contêm v , ou seja, que todos os caminhos mais longos de G se intersectam na origem de um caminho pendente mais longo de B . Suponha que existe um caminho P em \mathcal{P} que não contém v .

Como G é exoplanar, existe um circuito que passa por todos os vértices de B pela face externa, seja C esse circuito. Então C_{uv} é o caminho no sentido horário no circuito C que vai do vértice u ao vértice v . Seja x o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que $|C_{xv}|$ é mínimo e y o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que $|C_{vy}|$ é mínimo. Note que $x \neq y$, caso contrário P intersectaria B apenas em x , porém P possui ao menos uma aresta em B .

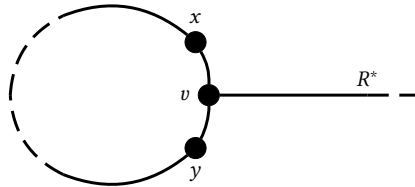


Figura 5.5: Circuito C e vértices x, y e v

Seja z o vértice tal que $xz \in E(P) \cap E(B)$ e $|C_{yx}|$ é mínimo.

Suponha que $y = z$, assim, temos que x é adjacente a y em P , ou seja ($xy \in E(P)$). Considere o caminho P' obtido de P substituindo a aresta xy pelo caminho C_{xy} , assim, $P' = (P - xy) \cup C_{xy}$. Temos que P' é de fato um caminho, pois C_{xy} só intersecta P em x e y .

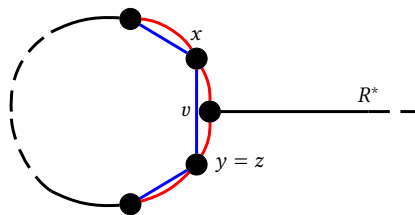


Figura 5.6: Circuito C e caminhos P e P'

Como v está no interior de C_{xy} , então $|P'| = |P| - 1 + |C_{xy}| \geq |P| - 1 + 2$. Assim, $|P'| \geq |P| + 1 > |P|$, uma contradição no fato de P ser um caminho mais longo de G .

Suponha então que $y \neq z$. Sejam P_1 e P_2 dois subcaminhos de P tal que $V(P_1) \cap V(P_2) = \{z\}$, $P = P_1 \cdot P_2$, $x \in V(P_1)$ e $y \in V(P_2)$. Como estamos considerando uma imersão plana de G tal que todos os vértices pertencem à fronteira de sua face externa, então P_2 contém somente vértices de C_{yz} (não necessariamente todos) e possivelmente um caminho pendente R .

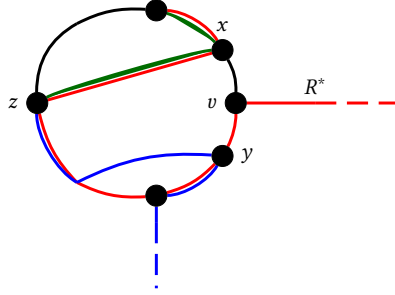


Figura 5.7: Circuito C e caminhos P_1, P_2 e P'

Assim, $|C_{yz}| \geq |P_2| - |R|$. Agora considere o caminho $P' = P_1 \cdot C_{yz}^{-1} \cdot R^*$. Temos que $|P'| = |P_1| + |C_{yz}| + |C_{vy}| + |R^*|$. Como $|C_{yz}| \geq |P_2| - |R|$, temos que $|P'| = |P_1| + |C_{yz}| + |C_{vy}| + |R^*| \geq |P_1| + |P_2| - |R| + |C_{vy}| + |R^*|$. Como R^* é o maior caminho pendente de B , temos que $|R^*| \geq |R|$. Além disso, $|C_{vy}| > 0$, pois $v \neq y$, já que P não contém v .

Portanto, $|P'| \geq |P_1| + |P_2| + |R^*| - |R| + |C_{vy}| > |P_1| + |P_2| = |P|$, uma contradição no fato de P ser um caminho mais longo de G .

Com isso, concluímos que P contém v . Logo, $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset$

□

5.5 Outras classes

A seguir, mencionamos resultados sobre outras classes de grafos que possuem vértice de Gallai, e damos as respectivas referências. Todos os resultados são para grafos conexos.

No mesmo artigo, KLAVŽAR e PETKOVŠEK (1990) provaram que além dos grafos divididos, grafos em que todos os blocos são hamiltonianos-conexos ou quase hamiltonianos-conexo possuem vértice de Gallai. Esses resultados implicam que cactos e grafos de blocos têm vértice de Gallai.

BALISTER *et al.* (2004) provaram para grafos arco-circulares e JOOS (2015) fechou uma lacuna na prova inicial.

REZENDE *et al.* (2013) provaram para 2-árvores. Este resultado foi posteriormente obtido como corolário de um teorema mais geral sobre grafos série-paralelos (uma superclasse dos grafos exoplanares e das 2-árvores), provado por G. CHEN *et al.* (2017).

Para grafos com número de emparelhamento no máximo três a prova foi obtida por F. CHEN (2015).

Resultados para grafos dualmente cordais e cografos foram obtidos em 2016 por JOHNSON *et al.* (2016). Contudo, o resultado para cografos foi posteriormente englobado pelo resultado sobre grafos P_4 -esparsos.

GOLAN e SHAN (2018) provaram para grafos livres de $2K_2$, que é uma superclasse dos grafos divididos.

CERIOLI e LIMA (2020) provaram para grafos *starlike*, grafos P_4 -esparsos, grafos livres de $(2P_5, K_{1,3})$, grafos que são a junção de dois grafos, grafos nos quais todos os blocos são grafos divididos, grafos de intervalos e grafos com vértice universal. Um grafo P_4 -esparso é um grafo G no qual, para todo conjunto S de cinco vértices de G , o subgrafo induzido $G[S]$ possui no máximo um P_4 . A junção de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ é definida como $G_1 \nabla G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{(a, b) : a \in V_1, b \in V_2\})$.

Mais recentemente, GAO e SHAN (2021) provaram para grafos livres de $(K_{1,3}, R)$ em que $R \in \{C_3, P_4, P_5, P_6, Z_1, Z_2, Z_3, B_{1,1}, B_{1,2}\}$. O grafo Z_n é o grafo formado por K_3 e um caminho de comprimento n ao identificar um vértice de K_3 com uma extremidade do caminho. O grafo $B_{n,m}$ é o grafo formado por K_3 , um caminho P de comprimento n e um caminho Q de comprimento m ao identificar um vértice de K_3 com uma extremidade de P e outro vértice de K_3 com uma extremidade de Q .

Capítulo 6

Abordagem algorítmica

Do ponto de vista algorítmico, sabemos que enquanto o problema de encontrar um caminho mais curto em um grafo arbitrário é fácil, o problema de encontrar um caminho mais longo é NP-difícil (GAREY e JOHNSON, 1979). Apesar disso, existem classes especiais de grafos para as quais o problema de encontrar um caminho mais longo pode ser resolvido eficientemente.

6.1 Árvores

6.1.1 Caminho mais longo

No Capítulo 5 mostramos que as árvores possuem vértice de Gallai. Com isso, é natural perguntar se é fácil encontrar um caminho mais longo numa árvore ou encontrar um vértice de Gallai numa árvore. Existem algoritmos lineares que resolvem essas duas questões.

Por volta de 1960, Dijkstra propôs um algoritmo linear que encontra um caminho mais longo em uma árvore, mas foi só em 2002 que BULTERMAN *et al.* (2002) apresentaram uma prova formal desse algoritmo, descrito a seguir. Lembramos que, numa árvore um vértice de grau 1 é chamado *folha*.

ALGORITMO 1 - CAMINHO MAIS LONGO EM UMA ÁRVORE (T)

- 1: $x \leftarrow$ uma folha qualquer de T .
 - 2: $P_x \leftarrow$ caminho mais longo em T com início em x .
 - 3: $y \leftarrow$ outra extremidade do caminho P_x .
 - 4: $P_y \leftarrow$ caminho mais longo em T com início em y .
 - 5: devolva P_y , um caminho mais longo em T .
-

Algoritmo de Dijkstra para encontrar um caminho mais longo numa árvore.

Para facilitar a compreensão do algoritmo acima, BULTERMAN *et al.* (2002) apresentaram uma descrição bastante intuitiva. Imagine que temos um modelo físico de uma árvore, onde cada par de vértices adjacentes está conectado por um pedaço de barbante de mesmo comprimento. Escolha um vértice folha x como raiz e segure a árvore nesse ponto, deixando

o restante pendurado. Identifique como y o vértice mais distante de x , ou seja, aquele que está mais abaixo no modelo físico. Em seguida, segure no ponto y e faça a árvore ficar novamente pendurada por esse ponto. Determine z , o vértice mais distante de y . O caminho entre y e z representa um caminho mais longo na árvore.

Preliminares

Sabemos que numa árvore, entre quaisquer dois vértices u e v existe um único caminho de u a v . Denote por P_{uv} esse caminho. Além disso, para quaisquer vértices a, b, c, d de uma árvore, temos que

- $|P_{ab}| \leq |P_{ac}| + |P_{cb}|$.
- Se $c \in P_{ab}$, então $|P_{ab}| = |P_{ac}| + |P_{cb}|$.
- Existe um vértice m tal que $m \in P_{ab} \cap P_{cd}$ ou $m \in P_{ac} \cap P_{bd}$.

Corretude do Algoritmo 1

Seja T uma árvore, e sejam x, y os vértices e P_x, P_y os caminhos encontrados pelo Algoritmo 1. Segue desse algoritmo as seguintes desigualdades:

- $\forall z \in V(T), |P_{xz}| \leq |P_x|$,
- $\forall z \in V(T), |P_{yz}| \leq |P_y|$.

Queremos provar que para todo par $u, v \in V(T)$ temos que $|P_{uv}| \leq |P_y|$.

Suponha que exista um vértice $m \in V(T)$ tal que $m \in P_{xv} \cap P_{uy}$. Sabemos que $|P_{xv}| \leq |P_{xy}|$. Assim, $|P_{xm}| + |P_{mv}| \leq |P_{xm}| + |P_{my}|$. Logo, $|P_{mv}| \leq |P_{my}|$. Somando $|P_{um}|$ em ambos os lados, temos $|P_{um}| + |P_{mv}| \leq |P_{um}| + |P_{my}|$. Portanto, $|P_{uv}| \leq |P_{uy}|$.

Analogamente, suponha agora que exista um vértice $m \in V(T)$ tal que $m \in P_{xu} \cap P_{vy}$. Temos que $|P_{xu}| \leq |P_{xy}|$. Então, $|P_{xm}| + |P_{mu}| \leq |P_{xm}| + |P_{my}|$. Logo, $|P_{mu}| \leq |P_{my}|$. Somando $|P_{vm}|$ em ambos os lados, temos que $|P_{vm}| + |P_{mu}| \leq |P_{vm}| + |P_{my}|$. Assim, $|P_{vu}| \leq |P_{vy}|$.

Dos dois casos, temos que $|P_{uv}| \leq |P_{uy}|$ ou $|P_{uv}| \leq |P_{vy}|$. Assim, existe um vértice $w \in V(T)$ tal que $|P_{uw}| \leq |P_{wy}| \leq |P_y|$, e então $|P_{uw}| \leq |P_y|$. Logo, o caminho P_y obtido pelo Algoritmo 1 é um caminho mais longo em T .

6.1.2 Vértice de Gallai

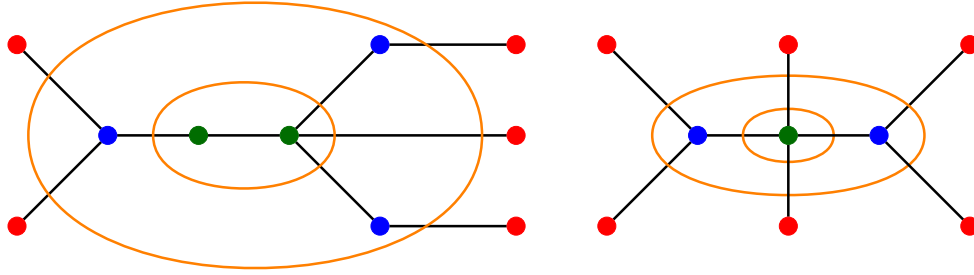
Em árvores, além de ser fácil encontrar um caminho mais longo, é também fácil encontrar um vértice de Gallai. Esse vértice, numa árvore é conhecido como *centro* (ele pode não ser único).

Existe um algoritmo linear para encontrar um centro de uma árvore, digamos T , que consiste em remover inicialmente todas as folhas de T , e iterativamente repetir esse processo nas árvores que são obtidas, até que reste apenas uma aresta ou um vértice.

ALGORITMO 2 - CENTRO DE UMA ÁRVORE (T)

- 1: se T tem um ou dois vértices, devolva os vértices de T .
 - 2: $T' \leftarrow T - \{f : f \text{ folha de } T\}$.
 - 3: CENTRO DE UMA ÁRVORE (T')
-

Algoritmo para encontrar centro de uma árvore.



Começando com as marcações laranjas maiores, podemos ver as árvores que resultam em cada passo do Algoritmo 2.

Figura 6.1: Exemplo de execução do Algoritmo 2

Corretude do Algoritmo 2

Vamos provar que o Algoritmo 2 devolve um ou dois vértices que são de fato centro de uma árvore.

Seja T uma árvore com n vértices e seja T' a árvore obtida após remover todos as folhas de T . Se $n = 3$, então T' possui apenas um vértice que está na interseção de todos os caminhos mais longos de T .

Assuma então que $n > 3$. Com isso, temos que toda folha de T possui um único vizinho em T que não é folha. Seja P um caminho mais longo em T . Claramente, os extremos de P são folhas. Seja P' o caminho em T' que resulta de P após a remoção das duas folhas de P . Sabemos que $|P'| = |P| - 2$.

A árvore T' possui $k < n$ vértices, e também possui um vértice na interseção de todos os seus caminhos mais longos. Suponha que P' não é um caminho mais longo em T' . Então existe um caminho Q' em T' tal que $|Q'| > |P'|$. Sabemos que os extremos de Q' são folhas em T' ; sejam eles x e y . Sabemos que tanto x como y possuem pelo menos um vizinho de grau 1 em T , pois em caso contrário teriam sido removidos de T . Podemos construir um caminho Q em T , que vai de uma folha (de T) que é adjacente a x , percorre o caminho P' até y e depois vai de y até uma folha (de T) que é adjacente a y . Assim, $|Q| = |Q'| + 2$. Como $|Q'| > |P'|$, temos que $|Q| = |Q'| + 2 > |P'| + 2 = |P|$, o que contradiz a escolha de P como caminho mais longo em T . Portanto, o caminho P' é um caminho mais longo em T' .

Pela hipótese de indução, segue que um vértice que está na interseção de todos os caminhos mais longos em T continua presente nas subárvores que são obtidas em cada iteração do algoritmo, até chegar em uma árvore com no máximo 2 vértices.

6.2 Outros resultados

Existem diversas classes de grafos para as quais já se conhecem algoritmos polinomiais para encontrar um caminho mais longo. [UEHARA e UNO \(2005\)](#) e [UEHARA e UNO \(2007\)](#) demonstraram isso para grafos de blocos, cactos, grafos de permutação bipartido, grafos limiares e outras classes adicionais. [UEHARA e VALIENTE \(2007\)](#) aprimoraram o algoritmo para grafos de permutação bipartido. [GHOSH *et al.* \(2011\)](#) provaram o mesmo resultado para grafos biconvexos, uma superclasse dos grafos de permutação bipartido. Embora esses autores estivessem trabalhando em subclasses de grafos de intervalos, foi apenas em 2009 que [IOANNIDOU *et al.* \(2009\)](#) e [IOANNIDOU *et al.* \(2011\)](#) provaram que para os grafos de intervalos, existe um algoritmo polinomial para encontrar um caminho mais longo. Além disso, [MARKOV *et al.* \(2012\)](#) desenvolveram um algoritmo linear que encontra um caminho mais longo em cactos.

Capítulo 7

Conclusão

Nesta monografia apresentamos vários tópicos que estudamos sobre caminhos mais longos, tanto do ponto de vista estrutural quanto do ponto de vista algorítmico. Contudo, não mencionamos todos os resultados existentes na literatura, e também tratamos com detalhes apenas alguns, pois é um assunto muito vasto. Nem tudo que estudamos consta nesta monografia, que é uma resenha mais seletiva sobre o tema aqui tratado.

Buscamos apresentar, de maneira didática, provas de alguns resultados da literatura, explicando cada passo e ilustrando com figuras quando necessário.

Nos Capítulos 3, 4 e 5 discutimos problemas sobre interseção de caminhos mais longos, focando na existência ou não de um vértice comum a todos eles. Apresentamos resultados sobre todos os caminhos mais longos e também para um número fixo de tais caminhos, analisando quais classes de grafos respondem positivamente ou não a essas perguntas.

No Capítulo 6 abordamos brevemente alguns resultados algorítmicos sobre a busca de um caminho mais longo ou um vértice de Gallai em determinadas classes de grafos.

Os estudos realizados ao longo da preparação desta monografia ofereceram ideias valiosas sobre interseção de caminhos mais longos, contribuindo para o avanço do conhecimento na área, tanto em termos estruturais quanto algorítmicos. Este trabalho não só aprofundou o entendimento sobre questões teóricas específicas, mas também possibilitou o aprendizado de diversas técnicas algorítmicas em diferentes classes de grafos. Esses avanços ampliaram a compreensão das propriedades de interseção de caminhos mais longos em diversas classes de grafos e forneceram uma boa base para a exploração de problemas correlatos abertos.

Esperamos que esta monografia seja útil não só para aqueles que têm interesse nos problemas tratados aqui, mas também para aqueles que têm interesse em outros tópicos da área de combinatória e teoria dos grafos.

Referências

- [AXENOVICH 2009] M. AXENOVICH. “When do three longest paths have a common vertex?” *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications* 1 (2009), pp. 115–120 (citado nas pgs. 14, 15).
- [BALISTER *et al.* 2004] P. N. BALISTER, E. GYORI, J. LEHEL e R. H. SCHELP. “Longest paths in circular arc graphs”. *Combinatorics, Probability and Computing* 13 (2004), pp. 311–317 (citado nas pgs. 1, 22).
- [BERGE 2001] C. BERGE. *The Theory of Graphs*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2001. ISBN: 9780486419756. URL: <https://books.google.com.br/books?id=h5BjnaoKyOwC> (citado na pg. 15).
- [BONDY e MURTY 2008] J.A. BONDY e U.S.R. MURTY. *Graph theory*. Vol. 244. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2008, pp. xii+651. ISBN: 978-1-84628-969-9 (citado na pg. 3).
- [BULTERMAN *et al.* 2002] R. W. BULTERMAN *et al.* “On computing a longest path in a tree”. *Information Processing Letters* 81.2 (2002), pp. 93–96 (citado na pg. 24).
- [CERIOLO e LIMA 2020] M. R. CERIOLO e P. T. LIMA. “Intersection of longest paths in graph classes”. *Discrete Applied Mathematics* 281 (2020), pp. 96–105 (citado nas pgs. 1, 23).
- [F. CHEN 2015] F. CHEN. “Nonempty intersection of longest paths in a graph with a small matching number”. *Czechoslovak Mathematical Journal* 65.2 (2015), pp. 545–553 (citado na pg. 23).
- [G. CHEN *et al.* 2017] G. CHEN *et al.* “Nonempty intersection of longest paths in series parallel graphs”. *Discrete Mathematics* 340 (2017), pp. 287–304 (citado nas pgs. 1, 22).
- [GALLAI 1968] T. GALLAI. “Problem 4, theory of graphs”. In: *Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary*. Ed. por P. ERDŐS e G. KATONA. New York: Academic Press, 1968, p. 362 (citado nas pgs. 1, 7).

- [GAO e SHAN 2021] Y. GAO e S. SHAN. “Nonempty intersection of longest paths in graphs without forbidden pairs”. *Discrete Applied Mathematics* 304 (2021), pp. 76–83 (citado na pg. 23).
- [GAREY e JOHNSON 1979] Michael R. GAREY e David S. JOHNSON. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: W. H. Freeman e Company, 1979. ISBN: 0716710455 (citado na pg. 24).
- [GHOSH *et al.* 2011] E. GHOSH, N. S. NARAYANASWAMY e C. P. RANGAN. “A polynomial time algorithm for longest paths in biconvex graphs”. In: *Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation*. WALCOM’11. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011, pp. 191–201 (citado na pg. 27).
- [GOLAN e SHAN 2018] G. GOLAN e S. SHAN. “Nonempty intersection of longest paths in $2K_2$ -free graphs”. *Electronic Journal of Combinatorics* 25.P2.37 (2018) (citado nas pgs. 1, 23).
- [GRÖTSCHEL 1984] Martin GRÖTSCHEL. “On intersections of longest cycles” (jan. de 1984) (citado na pg. 14).
- [GRÜNBAUM 1974] Branko GRÜNBAUM. “Vertices missed by longest paths or circuits”. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 17.1 (1974), pp. 31–38. ISSN: 0097-3165. DOI: [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(74\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0097-3165(74)90025-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0097316574900259> (citado na pg. 11).
- [GUTIÉRREZ 2021] Juan GUTIÉRREZ. “On the intersection of two longest paths in k-connected graphs”. *Pro Mathematica* 31.62 (fev. de 2021), pp. 11–23. URL: <https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/23402> (citado na pg. 14).
- [HATZEL 1979] Wolfgang HATZEL. “Ein planarer hypohamiltonscher graph mit 57 knoten.” *Mathematische Annalen* 243 (1979), pp. 213–216. URL: <http://eudml.org/doc/182816> (citado na pg. 11).
- [HIPPCHEN 2008] Thomas HIPPCHEN. “Intersections of longest paths and cycles”. In: 2008. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117026331> (citado na pg. 14).
- [HORTON 1973] J. D. HORTON. *A Hypotraceable Graph*. Technical Report CORR 73-4. Waterloo, Ontario, Canada: Dept. of Combinatorics e Optimization, University of Waterloo, 1973 (citado na pg. 11).
- [IOANNIDOU *et al.* 2009] K. IOANNIDOU, G. B. MERTZIOS e S. D. NIKOLOPOULOS. “The longest path problem is polynomial on interval graphs”. In: *Proceedings of the 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, pp. 403–414 (citado na pg. 27).

- [IOANNIDOU *et al.* 2011] K. IOANNIDOU, G. B. MERTZIOS e S. D. NIKOLOPOULOS. “The longest path problem has a polynomial solution on interval graphs”. *Algorithmica* 61.2 (2011), pp. 320–341 (citado na pg. 27).
- [JOBSON *et al.* 2016] A. S. JOBSON, A. E. KEZDY, J. LEHEL e S. C. WHITE. “Detour trees”. *Discrete Applied Mathematics* 206 (2016), pp. 73–80 (citado nas pgs. 1, 23).
- [JOOS 2015] F. JOOS. “A note on longest paths in circular arc graphs”. *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 35 (2015), pp. 419–426 (citado nas pgs. 1, 22).
- [KLAVŽAR e PETKOVŠEK 1990] S. KLAVŽAR e M. PETKOVŠEK. “Graphs with nonempty intersection of longest paths”. *Ars Combinatoria* 29 (1990), pp. 43–52 (citado nas pgs. 1, 18, 19, 22).
- [MARK 2022] S. MARK. “The Intersection of Longest Paths in a Graph”. Tese de dout. New Zealand: University of Canterbury, 2022 (citado na pg. 15).
- [MARKOV *et al.* 2012] M. MARKOV, I. A. MUGUREL, K. MANEV e N. TAPUS. “A linear time algorithm for computing longest paths in cactus graphs”. *Serdica Journal of Computing* 6.3 (2012), pp. 287–298 (citado na pg. 27).
- [REZENDE 2014] S. F. de REZENDE. “Caminhos mais longos em grafos”. Diss. de mest. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2014 (citado na pg. 14).
- [REZENDE *et al.* 2013] S. F. de REZENDE, C. G. FERNANDES, D. M. MARTIN e Y. WAKABAYASHI. “Intersecting longest paths”. *Discrete Mathematics* 313.12 (2013), pp. 1401–1408 (citado nas pgs. 1, 15, 21, 22).
- [SKUPIEŃ 1996] Zdzisław SKUPIEŃ. “Smallest sets of longest paths with empty intersection”. *Combinatorics, Probability and Computing* 5 (dez. de 1996), pp. 429–436. DOI: [10.1017/S0963548300002170](https://doi.org/10.1017/S0963548300002170) (citado na pg. 13).
- [TUTTE 1956] William T. TUTTE. “A theorem on planar graphs”. *Transactions of the American Mathematical Society* 82 (1956), pp. 99–116. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:48021210> (citado na pg. 12).
- [UEHARA e UNO 2005] R. UEHARA e Y. UNO. “Efficient algorithms for the longest path problem”. In: *Algorithms and Computation*. Ed. por Rudolf FLEISCHER e Gerhard TRIPPEN. Vol. 3341. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelberg, 2005, pp. 1547–1553 (citado na pg. 27).
- [UEHARA e UNO 2007] R. UEHARA e Y. UNO. “On computing longest paths in small graph classes”. *Internat. J. Found. Comput. Sci.* 18.5 (2007), pp. 911–930 (citado na pg. 27).
- [UEHARA e VALIENTE 2007] R. UEHARA e G. VALIENTE. “Linear structure of bipartite permutation graphs and the longest path problem”. *Inf. Process. Lett.* 103 (jul. de 2007), pp. 71–77 (citado na pg. 27).

- [VOSS e WALTHER 1974] H.-J. VOSS e H. WALTHER. *Über Kreise in Graphen*. Vol. 2. VEB Dt. Verlag der Wissenschaften, 1974, p. 38 (citado na pg. 8).
- [WALTHER 1969] H. WALTHER. “Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen”. *J. Combin. Theory* 6 (1969), pp. 1–6 (citado nas pgs. 1, 8).
- [ZAMFIRESCU 1972] Tudor ZAMFIRESCU. “A two-connected planar graph without concurrent longest paths”. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 13.2 (1972), pp. 116–121. ISSN: 0095-8956. DOI: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(72\)90048-2](https://doi.org/10.1016/0095-8956(72)90048-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895672900482> (citado na pg. 10).
- [ZAMFIRESCU 1975] Tudor ZAMFIRESCU. “L’histoire et l’état present des bornes connues pour pk_j , ck_j , p_j et ck_j .” (1975) (citado na pg. 10).
- [ZAMFIRESCU 1976] Tudor ZAMFIRESCU. “On longest paths and circuits in graphs.” *Mathematica Scandinavica* 38 (1976), pp. 211–239. URL: <http://eudml.org/doc/166469> (citado nas pgs. 8, 10, 11).