Caminhos mais longos em grafos: abordagem estrutural e algorítmica

Idian Camargo Capozzoli
Orientadora: Yoshiko Wakabayashi
Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo

Introdução

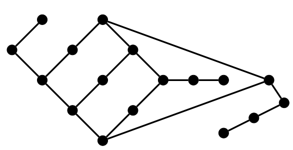
Em teoria dos grafos, problemas sobre caminhos são uns dos mais fundamentais. Neste trabalho focamos problemas sobre caminhos mais longos em grafos, considerando tanto questões estruturais quanto algorítmicas.

Questões Estruturais

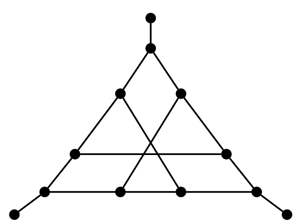
Proposiçao 1 (Fato bem conhecido) *Num grafo conexo quaisquer dois caminhos mais longos têm um vértice em comum.*

Pergunta 1 (Gallai, 1966) *É verdade que num grafo conexo todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum?*

Walther (1969) provou que a resposta a essa questão é negativa, exibindo um grafo com 25 vértices.



Menor contraexemplo planar



Contraexemplo com 12 vértices

Uma pergunta natural que surge:

Pergunta 2 (Sobre k caminhos mais longos) *Há inteiros fixos $k > 2$ para os quais quaisquer k caminhos mais longos num grafo conexo têm um vértice em comum?*

A resposta para essa pergunta não é conhecida. Skupień (1996) mostrou que para $k = 7$ a resposta é negativa. Quando $3 \leq k \leq 6$ não sabemos qual é a resposta. No caso $k = 3$, resultados obtidos para algumas classes de grafos sugerem que a seguinte conjectura seja verdadeira.

Conjectura 1 (Três caminhos mais longos) *Quaisquer três caminhos mais longos de um grafo conexo possuem um vértice em comum.*

Grafos de Gallai

Chamamos de grafo de Gallai um grafo para o qual a resposta à Pergunta 1 é positiva. Apresentamos a seguir algumas classes de grafos de Gallai.

Árvores

Teorema 1 *Seja T uma árvore e seja P um conjunto de subárvores de T. Se duas a duas as subárvores de P se intersectam, então todas se intersectam em pelo menos um vértice.*

Tomando P como um conjunto qualquer de caminhos mais longos, segue que

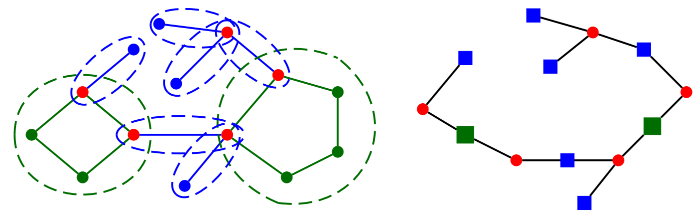
Proposição 1 + Teorema 1 $\rightarrow$ árvores têm vétices de Gallai

O Teorema 1 é um caso especial de um teorema mais geral que diz respeito à Propriedade Helly.

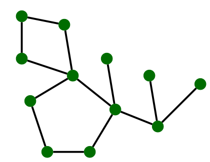
Propriedade 1 (Propriedade Helly) *Seja $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos. Dizemos que $\mathcal{C}$ tem a propriedade Helly quando qualquer subcoleção de $\mathcal{C}$ formada por subconjuntos que se intersectam dois a dois contém um elemento em comum.*

Teorema 2 *Seja G um grafo conexo e seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os seus caminhos mais longos. Existe um vértice comum a* todos os caminhos de $\mathcal{P}$ *se e somente se, para todo bloco B de G, todos os caminhos de $\mathcal{P}$ que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum.*

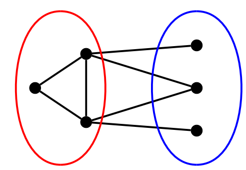
Outras classes



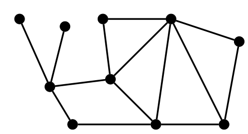
Grafo G e sua árvore de bloco $T(G)$.



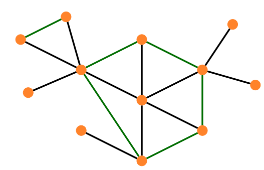
(a) Cacto
Klavzar e Petkovsek (1990)



(b) Grafo dividido
Klavzar e Petkovek (1990)



(c) Grafo Exoplanar
de Rezende et al. (2012)



(d) Grafo de Mark
Mark (2022)

Chamamos de grafos de Mark os grafos conexos com n vértices e até $n+5$ arestas. Mark (2022) provou que esses grafos satisfazem a Conjectura 1.

Questões Algorítmicas

O problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo arbitrário é NP-difícil. Há classes de grafos para as quais esse problema admite algoritmo polinomial. Um exemplo é a classe das árvores, para a qual existe um algoritmo linear. Apresentamos a seguir o algoritmo proposto por Dijkstra em 1960.

Caminho mais longo em árvore (T)

$x \leftarrow$ uma folha qualquer de T.
$P_x \leftarrow$ caminho mais longo em T com início em x.
$y \leftarrow$ outra extremidade do caminho P_x.
$P_y \leftarrow$ caminho mais longo em T com início em y.
retorne P_y, um caminho mais longo em T.

Observamos que, para cactos existe também um algoritmo linear para encontrar um caminho mais longo (Markov et al. 2012).

Um algoritmo simples para encontrar um vértice comum a todos os caminhos mais longos em uma árvore é o seguinte. Removemos todas as folhas da árvore dada, e enquanto a árvore que resulta tem mais do que 2 vértices, repetimos iterativamente esse processo. O(s) vértice(s) da árvore final obtida pertence(m) a todos os caminhos mais longos. Tais vértices, em árvores, são chamados *centros*.

Referências

Estudamos também outras classes de grafos (que omitimos aqui). Acesse o link para mais informações e referências:
`https://linux.ime.usp.br/~idian/mac0499`