

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**O Método da Descarga e Aplicações em
Códigos de Identificação**

Igor Fratel Santana

MONOGRAFIA FINAL

MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Yoshiko Wakabayashi

São Paulo
10 de janeiro de 2021

*Quando você atinge a minha idade, você percebe que não poderia ter feito
as coisas muito melhor ou muito pior do que você fez em primeiro lugar.*

— Jorge Luis Borges

Agradecimentos

*A apreciação é uma coisa maravilhosa: faz com o
que é excelente em outros pertença a nós também*

— Voltaire

Agradeço à minha família por ter me dado o ponto de partida, aos meus professores por terem me mostrado a direção e aos meus amigos por me acompanharem nesse caminho.

Resumo

Igor Fratel Santana. **O Método da Descarga e Aplicações em Códigos de Identificação**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021.

O *discharging method* ou **método da descarga** é uma técnica de prova em teoria dos grafos que foi usada para provar resultados importantes, sendo o Teorema das Quatro Cores sua aplicação mais conhecida. Código de identificação é um conceito em teoria dos grafos com aplicações em detecção de erros em sistemas de computação distribuída. O objetivo deste trabalho é oferecer um material didático para aqueles que tenham interesse em aplicar o método da descarga, exibindo uma ampla gama de exemplos. Além disso, pretende-se dar um enfoque especial para os códigos de identificação, dado que o método da descarga possui aplicações para provar teoremas relacionados a esse conceito.

Palavras-chave: teoria dos grafos. método da descarga. código de identificação.

Abstract

Igor Fratel Santana. **The discharging method and applications in identifying codes**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2021.

The discharging method is a proof technique in graph theory that has been used to prove important results, the Four Color Theorem being its most famous application. Identification code is a concept with applications on error detection in distributed computing systems. The goal of this text is to offer a learning material for those who want to apply the discharging method, offering a wide collection of examples. Also, we intend to place a special focus on identifying codes, since the discharging method has applications in proving theorems related to this concept.

Keywords: graph theory. discharging method. identifying codes.

Lista de Figuras

2.1	Um exemplo de 5-thread (dentro da área pontilhada).	4
3.1	Exemplos do conjunto de configurações do Teorema 5	11
4.1	Um grafo (à esquerda) e o seu grafo quadrado (à direita).	13
4.2	Configurações redutíveis (B) e (C) do Lema 2, com $k = 5$	14
4.3	Configurações redutíveis adicionais para o Teorema 6	16
5.1	Exemplo de grafo planar (à esquerda) e uma de suas imersões planas (à direita).	17
5.2	Grafo plano com indicações nas suas faces. A face f_4 é a face externa. . .	18
5.3	No grafo da imagem, a aresta e_1 é uma aresta de corte e o grau $l(f_2)$ é igual a 6.	18
5.4	Um grafo plano G (à esquerda) e o seu dual G^* (à direita).	18
5.5	Exemplo de triangulação plana.	22
6.1	Exemplo de código de identificação (vértices preenchidos) em um grafo. .	27
6.2	Nessa figura, o vértice destacado em cinza corresponde ao processador defeituoso, sendo identificado pelos seus dois vizinhos pertencentes ao código de identificação, que estão emitindo um <i>bit</i> 1.	28
6.3	Os conjuntos $N_1[v]$ e $N_2[v]$ estão indicados em linhas pontilhadas e tracejadas, respectivamente.	28

Sumário

1	Introdução	1
2	Noções preliminares	3
2.1	Conceitos fundamentais em grafos	3
2.2	Configurações inevitáveis e redutíveis	5
3	O método da descarga	7
3.1	Inevitabilidade	7
3.2	Redutibilidade	9
3.3	Unindo as duas etapas	10
4	Reservatório de carga	13
5	Grafos planares	17
5.1	Atribuição inicial de cargas	19
5.2	Exemplos	21
5.3	O Teorema das Quatro Cores	25
6	Códigos de identificação	27
7	Conclusão	35
	Referências	37

Capítulo 1

Introdução

Em cursos sobre teoria dos grafos, é comum que os alunos entrem em contato com diversos métodos para provar teoremas. Cada nova técnica aprendida se torna uma ferramenta no repertório do aluno, a quem caberá escolher a mais adequada para cada caso. Alguns exemplos de técnicas são as provas por contraexemplo minimal, provas por indução no número de vértices ou arestas do grafo, o método probabilístico desenvolvido por Paul Erdős, etc. O **método da descarga**, mais conhecido como *discharging method*, é mais uma dessas técnicas, sendo o Teorema das Quatro Cores sua aplicação mais conhecida. Simplificadamente, podemos dizer que a ideia principal deste método consiste em atribuir “cargas” (valores numéricos) aos vértices de um grafo e movimentar essas cargas entre os vértices de uma maneira esperta, de forma que seja possível concluir a existência de certas estruturas no grafo. Embora seja uma técnica antiga, o método da descarga não é tão difundido.

Uma das aplicações do método da descarga que será apresentada nesse trabalho é a determinação da densidade mínima de um código de identificação para uma certa classe de grafos. As definições de código de identificação e sua densidade serão apresentadas mais adiante. Por ora, nos contentaremos em afirmar que esse tipo de problema tem importância na área de sistemas distribuídos.

O objetivo principal deste trabalho é produzir um guia didático para aqueles que tenham interesse em entender e aplicar o método da descarga. Para isso, apresentaremos uma ampla gama de problemas nos quais este método foi aplicado com sucesso, tentando detalhar as escolhas fundamentais em cada prova e as particularidades da técnica. Um segundo objetivo, complementar ao primeiro, é apresentar o conceito de códigos de identificação e como aplicar o método da descarga em problemas envolvendo esse conceito.

Capítulo 2

Noções preliminares

Neste capítulo iremos introduzir algumas definições necessárias para o entendimento do texto. Fixaremos também a notação que será utilizada.

2.1 Conceitos fundamentais em grafos

Para qualquer conjunto A e qualquer $k \in \mathbb{N}$, definimos $\binom{A}{k} := \{S \subseteq A : |S| = k\}$.

Um **grafo** é um par ordenado (V, E) , onde V é um conjunto e $E \subseteq \binom{V}{2}$. Os elementos do conjunto V são chamados de **vértices** e os elementos do conjunto E são chamados de **arestas**. Escrevemos $e = \{u, v\}$, para expressar que estamos nomeando de e a aresta correspondente ao subconjunto de vértices $\{u, v\}$, vértices que também são chamados de **extremidades** ou **extremos** de e . Para simplificar, muitas vezes escrevemos apenas $e = uv$ quando não há perigo de confusão. Quando conveniente, para nos referirmos ao conjunto dos vértices (respectivamente, arestas) de um grafo G , podemos utilizar a notação $V(G)$ (respectivamente, $E(G)$).

Dizemos que uma aresta $e = uv$ **incide** em u e em v . Dois vértices são **adjacentes** se uma mesma aresta incide em ambos. Duas arestas são ditas **adjacentes** se elas incidem em um mesmo vértice.

Um grafo G é chamado **bipartido** se existem conjuntos $X \subseteq V(G)$ e $Y \subseteq V(G)$ tais que $X \cup Y = V(G)$, $X \cap Y = \emptyset$ e toda aresta possui uma extremidade em X e a outra em Y . Dizemos que os conjuntos X e Y definem uma bipartição de G .

Para todo vértice $v \in V$, definimos a **vizinhança** de v como o conjunto $N(v) := \{u : u \in V, \exists e \in E \text{ tal que } e = uv\}$.

Se W é um conjunto de vértices de um grafo G , definimos a **vizinhança** de W como $N(W) := \{u : u \in V(G) \setminus W, \exists v \in W \text{ tal que } \{u, v\} \in E(G)\}$.

O **grau** de um vértice $v \in V$ é definido como $d(v) := |N(v)|$.

Dizemos que um vértice v é um **j-vértice** se $d(v) = j$, para algum $j \in \mathbb{N}$. Similarmente, um **j^+ -vértice** é um vértice com grau maior ou igual a j e um **j^- -vértice** é um vértice com

grau menor ou igual a j .

Um **passeio** em um grafo G é uma sequência finita não vazia $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$, cujos termos são alternadamente vértices v_i e arestas e_j de G , e tal que, para todo i , $1 \leq i \leq k$, os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i . Dizemos que v_0 é o **início** ou a **origem** de P e v_k é o **final** ou **término** de P . Os vértices v_1, \dots, v_{k-1} são chamados de **vértices internos** de P . O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $E(P)$, respectivamente. O comprimento de P , denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P .

Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas. Um passeio é **fechado** se tem comprimento não nulo e sua origem e seu término coincidem.

Um **circuito** é uma trilha fechada cuja origem e vértices internos são todos distintos. Um circuito de comprimento n é denotado por C_n .

Uma ℓ -**thread** em um grafo G é uma trilha de comprimento $\ell + 1$ onde os ℓ vértices internos possuem grau 2 em G .

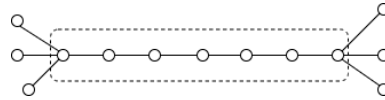


Figura 2.1: Um exemplo de 5-thread (dentro da área pontilhada).

Dados dois grafos $G = (V, E)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, dizemos que G_2 é um **subgrafo** de G se $V_2 \subseteq V$ e $E_2 \subseteq E$. Se G_2 é um subgrafo G e é diferente de G , dizemos que G_2 é um **subgrafo próprio** de G .

Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$, definimos $G - v$ como o subgrafo $(V(G) \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E(G) : v \in e\})$.

O **grau mínimo** de um grafo G (respectivamente, o **grau máximo**) é denotado por $\delta(G)$ (respectivamente, $\Delta(G)$) e definido como $\min\{d(v) : v \in V(G)\}$ (respectivamente, $\max\{d(v) : v \in V(G)\}$).

O **grau médio** de um grafo G , isto é, a média dos graus dos vértices de G , é denotado por $\bar{d}(G)$. Definimos o **grau médio máximo** de G (*maximum average degree*) como $mad(G) := \max_{H \subseteq G} \bar{d}(H)$, isto é, o maior grau médio dentre todos os subgrafos de G .

Uma **coloração** de um grafo G é uma função $c : V(G) \rightarrow S$, onde S é um conjunto qualquer. Nesse contexto, os elementos de S são normalmente chamados de cores. Dizemos que um vértice v está colorido com $c(v)$ ou possui cor $c(v)$. Uma **coloração própria** é uma coloração onde vértices adjacentes não possuem a mesma cor. O número mínimo de cores necessário para uma coloração própria de G é chamado de **número cromático** de G e denotado por $\chi(G)$.

Uma **coloração das arestas** de um grafo G é uma função $c : E(G) \rightarrow S$, onde S é um conjunto qualquer. Nesse contexto, os elementos de S são normalmente chamados de cores. Dizemos que uma aresta e está colorida com $c(e)$ ou possui cor $c(e)$. Uma **coloração própria de arestas** é uma coloração onde arestas adjacentes não possuem a mesma cor.

O número mínimo de cores necessário para uma coloração própria das arestas de G é chamado de **índice cromático** de G e denotado por $\chi'(G)$.

Seja p uma propriedade de grafos. Um grafo G é dito **minimal tal que p vale** se p vale em G e p não vale em nenhum subgrafo próprio de G .

2.2 Configurações inevitáveis e redutíveis

No contexto de aplicações do método da descarga, frequentemente é usado o termo **configuração**. Nessa monografia, definimos configuração como um subgrafo que satisfaz certas propriedades no grafo original. Exemplos de configuração são: um 2-vértice, um circuito de comprimento 5, um 3-vértice com um 6⁻-vizinho, etc.

Dizemos que um conjunto de configurações C é **inevitável** em um grafo G se pelo menos uma configuração de C deve existir em G .

Dizemos que um conjunto de configurações C é **redutível** para uma propriedade p se nenhuma configuração de C pode existir em um grafo minimal que não satisfaz p .

Capítulo 3

O método da descarga

Provas que utilizam o método da descarga consistem de duas etapas bem distintas. A primeira etapa é a prova da inevitabilidade de um conjunto de configurações e a segunda etapa é a prova da redutibilidade do mesmo conjunto para a propriedade que desejamos provar.

Seja G um grafo e H um conjunto de propriedades sobre os subgrafos de G . Essas propriedades são nossas hipóteses sobre o grafo. Imagine que, a partir do conjunto de propriedades H , queremos provar que uma certa propriedade p vale em G . Uma prova típica usando as duas etapas do método da descarga seria formulada da seguinte forma:

1. Prove que o conjunto de propriedades H implica a existência de pelo menos uma configuração de um certo conjunto de configurações C em G .
2. Prove que o conjunto de configurações C é redutível para a propriedade p .

Chamamos o primeiro passo de prova de **inevitabilidade** de um conjunto de configurações, e o segundo passo de prova de **redutibilidade** de um conjunto de configurações. Esses passos são suficientes para provar que o conjunto de hipóteses H implica na validade da propriedade p em G , pois proíbe a existência de um contraexemplo minimal.

Para esclarecer, suponha que H vale em G mas p não vale em G . Então deve existir um subgrafo $G' \subseteq G$ minimal onde p não vale. Mas como H vale para todo subgrafo de G , então H também vale para G' . Pela prova de inevitabilidade, alguma configuração de C deve existir em G' . Mas como C é redutível para p , nenhuma configuração em C pode existir em G' , que é um grafo minimal onde p não vale. Chegamos em uma contradição e, portanto, se H vale em G , então p vale em G .

3.1 Inevitabilidade

O objetivo da etapa de inevitabilidade é provar que se um grafo possui certas propriedades, então ele deve ter uma certa estrutura. Isto é, a partir de um conjunto de propriedades H em um grafo G , provamos que alguma configuração de um certo conjunto de configurações C deve existir em G . Para uma prova por absurdo, supomos que H vale em G e que nenhuma configuração em C existe em G . Então apresentamos um argumento

de contagem amortizada, em geral dos graus dos vértices de G , que nos permite chegar em uma contradição. Esse argumento de contagem é o que define o método da descarga e ficará evidente no exemplo a seguir.

Teorema 1. [CW17] *Se G é um grafo com $\bar{d}(G) < 3$, então G tem um 1^- -vértice ou um 2^- -vértice com um 5^- -vizinho.*

Demonstração. Suponha que G não tem nenhum 1^- -vértice e que nenhum 2^- -vértice tem um 5^- -vizinho. Atribua a cada vértice uma quantidade chamada "carga", igual ao grau do próprio vértice. Vamos "mover" cargas entre vértices de forma que todo vértice tenha carga pelo menos 3. Note que apenas 2^- -vértices precisam receber carga (nós supomos que não existem 1^- -vértices em G) e que 4^+ -vértices podem enviar carga.

Façamos cada 2^- -vértice tomar $\frac{1}{2}$ carga de cada vizinho. Agora todo 2^- -vértice tem carga 3, pois não existem 2^- -vértices adjacentes. Note que vértices de grau 3, 4 e 5 não perdem carga, já que assumimos que nenhum 2^- -vértice tem um 5^- -vizinho. Então basta verificarmos que todo 6^+ -vértice permanece com carga maior ou igual a 3, isto é, nenhum 6^+ -vértice "doou" mais carga do que deveria. Seja v um 6^+ -vértice em G . Como v enviou no máximo $\frac{1}{2}$ carga para cada vizinho, sua carga final é pelo menos $d(v) - \frac{1}{2}d(v) = \frac{1}{2}d(v)$, que é maior ou igual a 3, já que $d(v) \geq 6$. Então a carga final de todo vértice é pelo menos 3. Além disso, a soma das cargas finais de todo vértice deve ser igual à soma das cargas iniciais, que é igual à soma dos graus de todo vértice. Logo,

$$\bar{d}(G) = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V|} \geq \frac{\sum_{v \in V} 3}{|V|} = \frac{3|V|}{|V|} = 3,$$

o que é uma contradição. Com isso concluímos a prova. \square

Nesse exemplo, G tem a propriedade $\bar{d}(G) < 3$ e provamos que G tem pelo menos uma das seguintes configurações: um 1^- -vértice ou um 2^- -vértice com um 5^- -vizinho. Para isso, inicialmente atribuímos a cada vértice uma quantidade chamada **carga**, igual ao seu grau em G . Em seguida nós "transferimos" carga de um vértice para outro, isto é, realizamos operações de soma e subtração nas cargas dos vértices, cuidando para que a soma total das cargas permanecesse constante. A hipótese de não existência de 1^- -vértices e 2^- -vértices com um 5^- -vizinho nos possibilitou remanejar as cargas de forma que todo vértice terminasse com carga maior ou igual a 3. No final da contas, tudo o que fizemos foi contar os graus dos vértices de uma forma diferente.

A seguir temos mais um exemplo de prova de inevitabilidade.

Teorema 2. [CJW13] *Se G é um grafo conexo com $\bar{d}(G) < \frac{5}{2}$, então G contém um 3^- -vértice com um 1^- -vizinho, um 4^- -vértice com dois 2^- -vizinhos ou um 5^+ -vértice v com pelo menos $\frac{d(v)-1}{2}$ 2^- -vizinhos.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo com $\bar{d}(G) < \frac{5}{2}$. Suponha que nenhum 3^- -vértice tem um 1^- -vizinho, nenhum 4^- -vértice tem dois 2^- -vizinhos e todo 5^+ -vértice v tem menos que $\frac{d(v)-1}{2}$ 2^- -vizinhos. Atribua a todo vértice v em G carga igual a $d(v)$. Como nenhum 3^- -vértice tem um 1^- -vizinho, segue que todo 1^- -vértice deve ter um 4^+ -vizinho. Façamos

cada 1-vértice tomar carga $\frac{3}{2}$ do seu vizinho. Como nenhum 4^- -vértice tem dois 2^- -vizinhos, todo 2-vértice deve ter ao menos um 3^+ -vizinho. Faça todo 2-vértice tomar $\frac{1}{2}$ carga de um dos seus 3^+ -vizinhos. Feito isso, a carga final de todo 1-vértice e de todo 2-vértice passa a ser $\frac{5}{2}$. Como nenhum 3-vértice tem um 1-vizinho ou dois 2-vizinhos, todo 3-vértice perde no máximo $\frac{1}{2}$ de carga, que é tomada por um 2-vizinho. Dessa forma, todo 3-vértice passa a ter carga final pelo menos $\frac{5}{2}$. Como nenhum 4-vértice tem dois 2^- -vizinhos, todo 4-vértice perde no máximo $\frac{3}{2}$ de carga, que é tomada por um 1-vizinho. Dessa forma, todo 4-vértice passa a ter carga final pelo menos $\frac{5}{2}$. Seja v um 5-vértice. Então v deve ter menos de dois 2^- -vizinhos. Então v tem no máximo um 2^- -vizinho e tem carga final pelo menos $\frac{7}{2}$. Agora seja v um 6-vértice. Então v deve ter menos de $\frac{5}{2}$ 2^- -vizinhos. Então v tem no máximo dois 2^- -vizinhos e tem carga final pelo menos 3. Manipulando a expressão $d(v) - \left(\frac{d(v)-1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$ obtemos $\frac{d(v)+3}{4}$, que é maior ou igual a $\frac{5}{2}$ sempre que $d(v) \geq 7$. Portanto, todo 7^+ -vértice tem carga final pelo menos $\frac{5}{2}$. Como todo vértice tem carga final pelo menos $\frac{5}{2}$, concluímos que $\bar{d}(G) \geq \frac{5}{2}$, uma contradição. \square

3.2 Redutibilidade

Seja C um conjunto de configurações e p uma propriedade. O objetivo da etapa de redutibilidade é provar que o conjunto C é redutível para p . Isto é, queremos provar que nenhuma configuração em C pode existir em um grafo minimal que não respeite p . Para uma prova por absurdo, consideramos um grafo minimal G tal que p não vale e supomos que alguma configuração de C existe em G . Para cada configuração possível, utilizaremos a minimalidade de G em um argumento para encontrar uma contradição. A seguir demonstraremos dois exemplos básicos.

Teorema 3. [CW17] *Em um grafo G , a existência de um vértice de grau menor que k é uma configuração redutível para a propriedade $\chi(G) \leq k$.*

Demonstração. Seja G um grafo minimal tal que $\chi(G) > k$. Suponha que existe um vértice $v \in V(G)$ tal que $d(v) < k$. Defina $G' := G - v$. Como G é minimal tal que $\chi(G) > k$, segue que $\chi(G') \leq k$. Seja c uma coloração própria dos vértices G' usando k cores. Como $d(v) < k$, podemos estender essa coloração para G atribuindo a v uma das cores que não está presente em nenhum dos seus vizinhos. Dessa forma, construímos uma coloração própria dos vértices de G usando apenas k cores, uma contradição. \square

Teorema 4. [CW17] *Em um grafo G , a existência de uma aresta $e = uv$ tal que $d(u) + d(v) \leq k + 1$ é uma configuração redutível para a propriedade $\chi'(G) \leq k$.*

Demonstração. Seja G um grafo minimal tal que $\chi'(G) > k$. Suponha que existe em G uma aresta $e = uv$ tal que $d(u) + d(v) \leq k + 1$. Defina $G' := G - e$. Como G é minimal, segue que $\chi'(G') \leq k$. Seja c uma coloração própria das arestas de G' usando k cores. Como a aresta e possui no máximo $k - 1$ arestas adjacentes (a própria aresta é contada uma vez no grau de cada extremidade), podemos estender essa coloração para G atribuindo a e uma das cores que não está presente em nenhum dos seus vizinhos. Dessa forma, construímos uma coloração própria das arestas de G usando apenas k cores, uma contradição. \square

3.3 Unindo as duas etapas

Tendo todas as ferramentas para desenvolver uma prova utilizando o método da descarga, estamos prontos para um teorema completo, que utilize tanto a etapa de inevitabilidade quanto a etapa de redutibilidade. Mas antes de apresentar o teorema, definiremos alguns conceitos preliminares.

Uma **atribuição de listas** (*list assignment*) a um grafo G é uma função L que atribui a cada vértice $v \in V(G)$ um conjunto de cores $L(v)$, chamado de lista. Uma **atribuição de listas k -uniforme** é uma atribuição de listas onde toda lista tem tamanho k .

Dada uma atribuição de listas L a um grafo G , uma **L -coloração** é uma coloração própria dos vértices de G onde todo vértice $v \in V(G)$ só pode ser colorido com uma cor de $L(v)$.

Dizemos que um grafo G é **L -colorível** se G admite uma L -coloração. Dizemos que G é **k -selecionável** (*k -choosable*) se, para toda atribuição de listas k -uniforme L , G é L -colorível. Definimos o **número lista-cromático** (*list chromatic number*) $\chi_\ell(G)$ como o menor k tal que G é k -selecionável.

Uma **coloração injetiva** é uma coloração dos vértices de um grafo onde dois vértices à distância 2 devem possuir cores distintas, mas vértices vizinhos podem possuir a mesma cor. Definimos o **número de seleção injetivo** $\chi(G)_l^i$ (*injective choice number*) como o menor k tal que, para toda atribuição de listas k -uniforme L , G possui uma L -coloração injetiva.

Teorema 5. [CKY10] *Se G é um grafo com $\Delta(G) \leq 3$ e $mad(G) < \frac{36}{13}$, então $\chi_l^i(G) \leq 5$.*

Demonstração. Seja G um grafo com $\Delta(G) \leq 3$ e $mad(G) < \frac{36}{13}$.

- Inevitabilidade

Provaremos que as seguintes configurações são inevitáveis:

- um 1^- -vértice;
- dois 2-vértices adjacentes;
- um 3-vértice com dois 2-vizinhos;
- dois 3-vértices adjacentes, cada um possuindo um 2-vizinho.

Suponha que nenhuma das configurações acima está presente em G . Como não há nenhum 1^- -vértice, $\delta(G) \geq 2$. Para cada vértice, atribuímos uma carga inicial igual ao grau do vértice. Note que, como $2 < \frac{36}{13} < 3$, apenas os 2-vértices precisam ganhar carga. Definimos as seguintes regras de descarga, que serão aplicadas em sequência:

- Regra 1:
Todo 2-vértice toma $\frac{3}{13}$ da carga de cada um de seus vizinhos.
- Regra 2:
Todo 2-vértice toma $\frac{1}{13}$ de carga de cada 3-vértice conectado a ele por um caminho de comprimento 2.

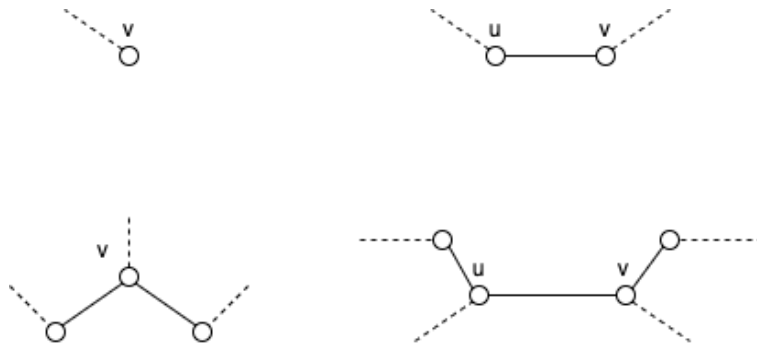


Figura 3.1: Exemplos do conjunto de configurações do Teorema 5

Seja v um 3-vértice que possui um 2-vizinho. Então v perderá $\frac{3}{13}$ para esse vizinho. Como não existem pares de 2-vértices adjacentes e dois 3-vértices adjacentes não podem ambos possuir um 2-vizinho, não existe nenhum caminho de comprimento 2 conectando v a um 2-vértice. Logo, v perde exatamente $\frac{3}{13}$ e sua carga final é $\frac{36}{13}$.

Seja v um 3-vértice que não possui nenhum 2-vizinho. Toda aresta incidente a v pode fazer parte de exatamente um caminho de comprimento 2 entre v e um 2-vértice. Logo, v perde no máximo $3 * \frac{1}{13}$ e sua carga final é pelo menos $\frac{36}{13}$.

Agora basta verificar que, ao final da aplicação das duas regras de descarga, todo 2-vértice possui carga pelo menos $\frac{36}{13}$. Seja v um 2-vértice. Então v recebe carga $\frac{3}{13}$ de cada um de seus dois 3-vizinhos. Cada 3-vizinho de v possui dois 3-vizinhos que, por sua vez, estão conectados a v por caminhos de comprimento 2. Logo, v recebe carga $\frac{1}{13}$ através de 4 caminhos de comprimento 2 conectando-o a um 3-vértice. Por fim, v termina com carga pelo menos $2 + 2 * \frac{3}{13} + 4 * \frac{1}{13} = \frac{36}{13}$.

Portanto, todo vértice do grafo tem carga final pelo menos $\frac{36}{13}$, contradizendo a hipótese de que $mad(G) < \frac{36}{13}$. Provamos que o conjunto de configurações listado é inevitável.

- Redutibilidade

Provaremos que as configurações inevitáveis listadas acima são redutíveis para a propriedade $\chi_l^i(G) \leq 5$ na família de grafos com $\Delta(G) \leq 3$. Seja G um grafo com $\Delta(G) \leq 3$ e minimal tal que $\chi_l^i(G) > 5$. Seja L uma atribuição de listas 5-uniforme para G . Para cada uma das configurações que desejamos provar redutíveis, assumiremos que G possui essa configuração e encontraremos uma contradição. Dizemos que uma cor está disponível para um vértice v se nenhum vértice à distância 2 de v está colorido com essa cor.

- Caso 1: G possui um 1⁻-vértice v . Pela minimalidade de G , podemos L -colorir $G - v$. Como v possui no máximo 2 vértices à distância 2, pelo menos 3 cores em $L(v)$ estão disponíveis. Portanto, podemos estender a L -coloração de $G - v$ para G .
- Caso 2: G possui dois 2-vértices adjacentes u e v . Pela minimalidade de G , podemos L -colorir $G - u - v$. Como tanto u quanto v possuem no máximo 3 vértices à distância 2, podemos estender a L -coloração para G .

- Caso 3: G possui um 3-vértice u com dois 2-vizinhos v e w . Pela minimalidade de G , podemos L -colorir $G - u - v - w$. Como tanto u quanto v e w possuem no máximo 4 vértices à distância 2, podemos estender a L -coloração para G .
- Caso 4: G possui dois 3-vértices adjacentes u e v com 2-vizinhos u' e v' , respectivamente. Pela minimalidade de G , podemos L -colorir $G - u - v - u' - v'$. Note que u possui no máximo 5 vértices à distância 2, sendo que v' é um deles. Mas como v' não está colorido, no máximo 4 cores de $L(u)$ não podem ser usadas em u , ou seja, pelo menos uma cor está disponível. De forma análoga, pelo menos uma cor de $L(v)$ está disponível para v . Após colorirmos u e v , podemos colorir u' e v' , ambos possuindo no máximo 4 vértices à distância 2. Dessa forma, estendemos a L -coloração para G .

Provamos que nenhuma das configurações pode existir em G , pois todas contradizem sua minimalidade. Logo, o conjunto de configurações é redutível.

Temos um conjunto de configurações inevitável e redutível, o que conclui a prova. \square

Como esclarecimento adicional, suponha que o teorema é falso, ou seja, existe um grafo G tal que $\Delta(G) \leq 3$, $mad(G) < \frac{36}{13}$ e $\chi_l^i(G) > 5$. Suponha que G é um contraexemplo minimal para o teorema. Então alguma configuração do nosso conjunto inevitável deve existir em G . Mas essa configuração também é redutível, não podendo existir em G . Temos uma contradição. Portanto, o teorema é verdadeiro.

Capítulo 4

Reservatório de carga

Nesta seção, apresentaremos o conceito de **reservatório de carga** (*pot of charge*) e algumas demonstrações que utilizam o conceito.

No contexto do método da descarga, um reservatório de carga é um objeto separado do grafo para onde os vértices podem enviar carga e de onde os vértices podem receber carga. O reservatório de carga possui carga inicial zero e pode receber e enviar carga ao longo da aplicação do método, com a condição de que sua carga final seja não negativa. Isso permite que cargas sejam movidas por longas distâncias dentro do grafo, já que a carga depositada no reservatório por algum vértice pode ser retirada por outro muito distante daquele que a depositou [CW17].

Explicado o conceito de reservatório de carga, faremos uma definição preliminar e apresentaremos dois lemas para, em seguida, aplicar o conceito no Teorema 6.

Dado um grafo $G = (V, E)$, definimos o **grafo quadrado** de G , denotado por G^2 , como o grafo obtido ao adicionar arestas ligando todos os vértices à distância 2 em G .

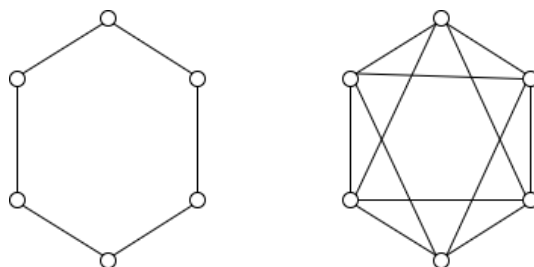


Figura 4.1: Um grafo (à esquerda) e o seu grafo quadrado (à direita).

Lema 1. [ERT80] Circuitos de comprimento par são 2-selecionáveis

Demonstração. Mostraremos que o circuito de comprimento $2t$, denotado por C_{2t} , é L -colorível quando toda lista tem tamanho 2.

Se as listas são idênticas, então escolha cores alternadamente. Caso contrário, existem vértices adjacentes x e y tais que $L(x)$ contém uma cor c que não está em $L(y)$. Atribua c a x e, ao longo do caminho $C_{2t} - x$, atribua uma cor a cada vértice que seja diferente da cor atribuída ao vértice anterior. Tal escolha é sempre possível e as cores escolhidas definem uma L -coloração, já que as cores em x e y são diferentes. \square

Lema 2. [BIN16] Fixe $k \geq 4$. Dentre grafos G com $\Delta(G) \leq k$, as seguintes configurações são redutíveis para a propriedade $\chi_l(G^2) \leq k + 1$:

- (A) um 1-vértice;
- (B) uma 2-thread cujas extremidades são um $(k - 1)^-$ -vértice e um $(k - 2)^-$ -vértice;
- (C) um circuito de comprimento divisível por 4 composto por 3-threads cujas extremidades têm grau k .

Demonstração. Seja G um grafo com $\Delta(G) \leq k$ e minimal tal que $\chi_l(G^2) > k + 1$. Seja L uma atribuição de listas $k + 1$ -uniforme em G . A figura 4.2 mostra as configurações (B) e (C).

- Se (A) ocorre em um 1-vértice v , então seja $G' = G - v$. Uma L -coloração de G'^2 se estende para uma L -coloração de G^2 pois, como v tem grau no máximo k em G^2 , no máximo k cores precisam ser evitadas em v .

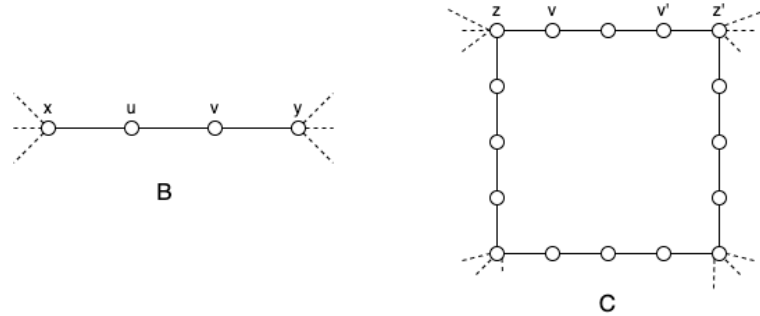


Figura 4.2: Configurações redutíveis (B) e (C) do Lema 2, com $k = 5$

- Se (B) ocorre, então G tem um caminho $\langle x, u, v, y \rangle$ tal que $d(u) = d(v) = 2$, $d(x) \leq k - 1$ e $d(y) \leq k - 2$. Nós temos que $(G - \{u, v\})^2 = G^2 - \{u, v\}$. Seja $G' = G - \{u, v\}$. Por minimalidade, G'^2 possui uma L -coloração Φ . Em G , a cor a ser atribuída a u deve ser diferente das cores em $\{x, y\} \cup N_{G'}(x)$. Como $d(x) \leq k - 1$ e $|L(u)| = k + 1$, uma cor está disponível para u . Agora, a cor a ser atribuída a v deve ser diferente das cores em $\{x, y, u\} \cup N_{G'}(y)$. Como $d(y) \leq k - 2$ e $|L(u)| = k + 1$, uma cor está disponível para v .
- Se (C) ocorre, então obtemos G' removendo os 2-vértices do dado circuito C em G . Novamente, G'^2 é o subgrafo de G^2 induzido por $V(G')$. Seja v um vértice removido e que possui um k -vizinho z em G . A cor em v deve ser diferente daquela em z e de todas as cores nos $k - 2$ vizinhos de z em G' . Como $|L(v)| = k + 1$, restam pelo menos duas cores disponíveis para v . Os vizinhos de k -vértices em C induzem um circuito de comprimento par em G^2 . Pelo Lema 1, podemos estender a coloração de G' para esses vértices. Por fim, os 2-vértices nos centros das 3-threads possuem

apenas quatro vizinhos em G^2 , todos os quais já foram coloridos. Como $k \geq 4$, resta uma cor disponível para cada um desses vértices. \square

Tendo provado os dois lemas anteriores, estamos prontos para apresentar o nosso primeiro teorema utilizando o conceito de reservatório de carga.

Teorema 6. [CŠ13] *Se G é um grafo com $\Delta(G) \leq 6$ e $mad(G) < \frac{5}{2}$, então $\chi_l(G^2) \leq 7$.*

Demonstração. Seja G um contraexemplo minimal e $k = 6$. Pelo Lema 2 (A), podemos assumir que $\delta(G) \geq 2$. Pelo Lema 2 (B), G não possui uma ℓ -thread com $\ell \geq 4$ e toda 3-thread possui k -vértices em cada extremidade. Pelo Lema 2 (C), A união das 3-threads de G é um subgrafo acíclico H . Portanto, o número de 6-vértices é maior que o número de 3-threads.

Agora iremos definir as regras de descarga para provar que se $mad(G) < \frac{5}{2}$ e $\delta(G) \geq 2$, então alguma configuração do tipo (B) ou (C) do Lema 2 deve ocorrer. Na verdade, ao longo da prova, veremos que será necessário adicionar mais configurações, mas nós provaremos que elas são redutíveis. Como de costume, a carga inicial de cada vértice é igual ao seu grau.

- Regra 1: cada vértice de grau 5 ou 6 doa carga $1/2$ para cada um de seus vizinhos.
- Regra 2: cada 2-vértice com um vizinho de grau 2 e um vizinho de grau 3 ou 4 toma carga $1/2$ do vizinho de maior grau.
- Regra 3: cada 2-vértice onde ambos os vizinhos possuem grau 3 ou 4 toma carga $1/4$ de cada vizinho.
- Regra 4: cada 6-vértice contribui com carga $1/2$ para o reservatório e cada 2-vértice no centro de uma 3-thread toma carga $1/2$ do reservatório.

Como existem mais 6-vértices do que 3-threads, o reservatório termina com carga positiva. Pelas regras de descarga, cada 2-vértice ganha carga $1/2$ e termina satisfeito. Um 5-vértice doa, no máximo, carga $5/2$ e termina satisfeito, enquanto um 6-vértice pode doar no máximo $6/2$ para seus vizinhos e $1/2$ para o reservatório, também terminando satisfeito.

Um 4-vértice fica insatisfeito se perde mais que $3/2$ e não possui nenhum 5^+ -vizinho para recuperar sua carga. Um 3-vértice fica insatisfeito se perde mais que $1/2$ e não possui nenhum 5^+ -vizinho para recuperar sua carga. Felizmente, as configurações para as quais cada vértice pode ficar insatisfeito são redutíveis para $\chi_l(G^2) \leq 7$ e, portanto, a presença de tais configurações não é um problema.

Seja L uma atribuição de listas 7-uniforme para os vértices de G .

- Para que um 4-vértice v perca mais do que $3/2$ de carga, todos os seus vizinhos devem ser 2-vértices e pelo menos três das threads incidentes devem ser 2-threads. Nós mostraremos a seguir que essa configuração é redutível. Defina G' a partir de G removendo v de G e três dos seus vizinhos que estão em 2-threads. Note que G'^2 é o subgrafo de G^2 induzido por $V(G')$. Como $|N_{G^2}(v) \cap V(G')| = 5$, podemos estender uma L -coloração de G'^2 para incluir v . Quando reinserimos um a um os 2-vizinhos de v , o número de vértices cujas cores eles devem evitar é 4, 5 e 6, respectivamente,

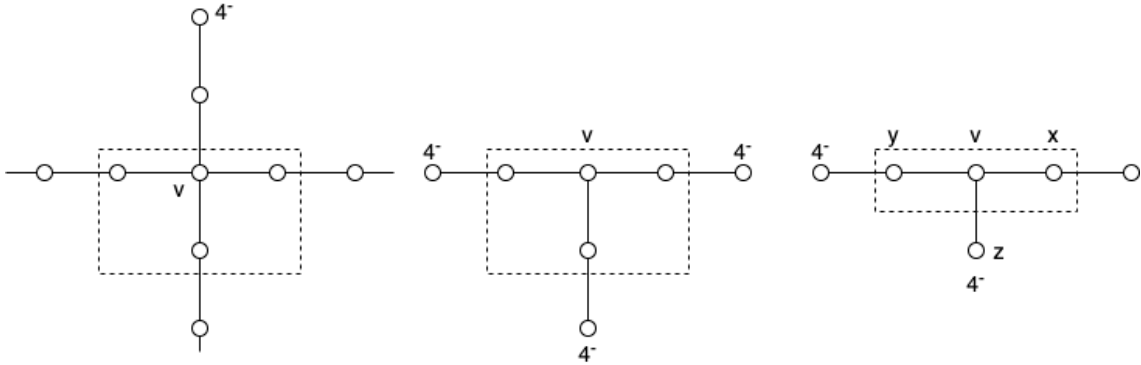


Figura 4.3: Configurações redutíveis adicionais para o Teorema 6

de forma que há uma cor disponível em cada passo. Dessa forma, estendemos a L -coloração para G^2 .

- Para que um 3-vértice termine insatisfeito, perdendo mais que $1/2$ de carga, ele não pode possuir nenhum 5^+ -vizinho (pois este doa no máximo $1/2$ para cada vizinho). Ele pode doar $1/4$ para três vizinhos ou doar $1/2$ para um vizinho e pelo menos $1/4$ para outro. No primeiro caso, sejam $N_G(v) = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $G' = G - N_G[v]$. O vizinho de x_i que não é v tem grau no máximo 4. Conforme reinsertamos os vértices de $N_G(v)$, o número de vértices cujas cores eles devem evitar é 4, 5 e 6, respectivamente, de forma que uma cor está disponível em cada passo. Podemos então recolocar v , sendo que ele precisa evitar as cores em seis vértices. No segundo caso, v dá carga para exatamente dois 2-vizinhos, x e y , onde x está em uma 2-thread e toma $1/2$ de v e o outro vizinho de y é um 4^- -vértice. Seja z o terceiro vizinho de v . Note que $d(z) \leq 4$. Com $S = \{v, x, y\}$, seja $G' = G - S$. Novamente, $G'^2 = G^2 - S$. Reinsertamos v , depois y e, por fim, x . Em cada reinsertão, atribuímos ao vértice uma cor da sua lista de forma a evitar as cores de, no máximo, outros seis vértices.

Como todas as configurações onde 3-vértices ou 4-vértices terminariam insatisfeitos são redutíveis, podemos assumir que elas não ocorrem em G , de forma que todo vértice termina com carga $\geq 5/2$, contradizendo a hipótese de que $mad(G) < 5/2$. Logo, pelo método da descarga, obtemos $\chi_l(G^2) \leq 7$. \square

Além de ser um exemplo para a utilidade dos reservatórios de carga em provas utilizando o método da descarga, o teorema acima, de certa forma, ilustra o processo de elaboração de uma prova utilizando o método da descarga. Note que, utilizando apenas as configurações redutíveis obtidas no Lema 2, não seria possível provar o teorema. No entanto, a própria tentativa de demonstração utilizando apenas essas configurações redutíveis acaba por apontar na direção das configurações restantes, isto é, ao examinar os possíveis casos onde 3-vértices ou 4-vértices doam muita carga a ponto de terminarem insatisfeitos, encontramos certas configurações que, felizmente, se mostraram redutíveis. Portanto, bastou adicioná-las ao nosso conjunto.

Capítulo 5

Grafos planares

Neste capítulo serão apresentadas aplicações do método da descarga em problemas envolvendo grafos planares. Essa classe de grafos merece uma atenção especial, pois existem estratégias específicas de atribuição das cargas iniciais para eles. A seguir, veremos algumas definições essenciais para trabalharmos com grafos planares. Adotamos aqui a terminologia usada no livro de Bondy e Murty [BM08].

Um grafo G é dito **planar** se podemos desenhá-lo no plano de forma que nenhuma de suas arestas se cruzem. Um tal desenho é denominado uma **imersão plana** do grafo. Um grafo planar imerso no plano é chamado de **grafo plano**.

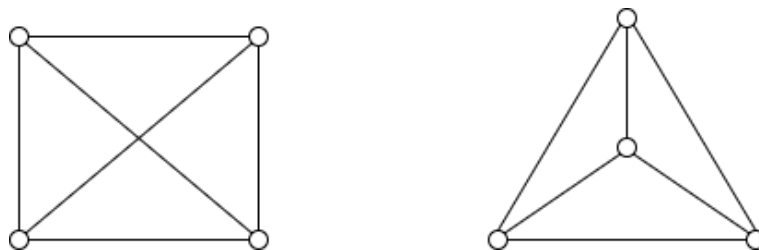


Figura 5.1: Exemplo de grafo planar (à esquerda) e uma de suas imersões planas (à direita).

Além de vértices e arestas, grafos planos também possuem **faces**, que são as regiões conexas resultantes da remoção dos vértices e arestas do grafo. Todo grafo plano tem uma face ilimitada, que denominamos **face externa**. O conjunto de faces de um grafo plano G é denotado por $F(G)$.

A **fronteira** de uma face f é o passeio fechado formado pelos vértices e pelas arestas no fecho de f . Uma face é dita **incidente** aos vértices e arestas na sua fronteira. Duas faces são ditas **adjacentes** se suas fronteiras possuem uma aresta em comum. Uma **aresta de corte** em um grafo plano é uma aresta que possui apenas uma face incidente. Dizemos que uma aresta **separa** as faces incidentes a ela. O **comprimento** ou grau de uma face f , denotado por $l(f)$, é igual ao número de arestas na sua fronteira, sendo que arestas de corte são contadas duas vezes.

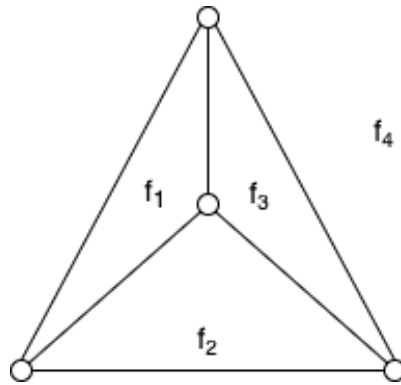


Figura 5.2: Grafo plano com indicações nas suas faces. A face f_4 é a face externa.

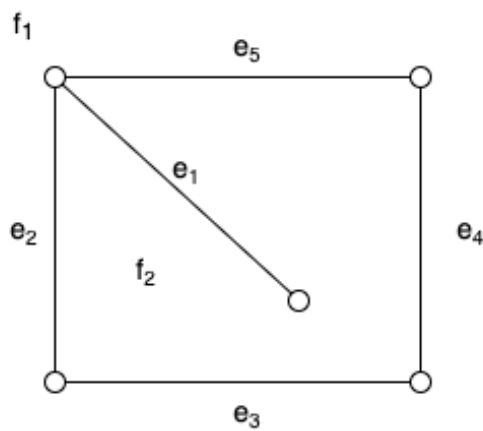


Figura 5.3: No grafo da imagem, a aresta e_1 é uma aresta de corte e o grau $l(f_2)$ é igual a 6.

Dado um grafo plano G , podemos definir um grafo G^* da seguinte forma: para cada face f de G , existe um vértice f^* em G^* e, para cada aresta e de G , existe uma aresta e^* em G^* . Dois vértices f^* e g^* são ligados pela aresta e^* em G^* se e somente se as suas faces correspondentes f e g são separadas pela aresta e em G . Tal grafo G^* é chamado **grafo dual** de G .

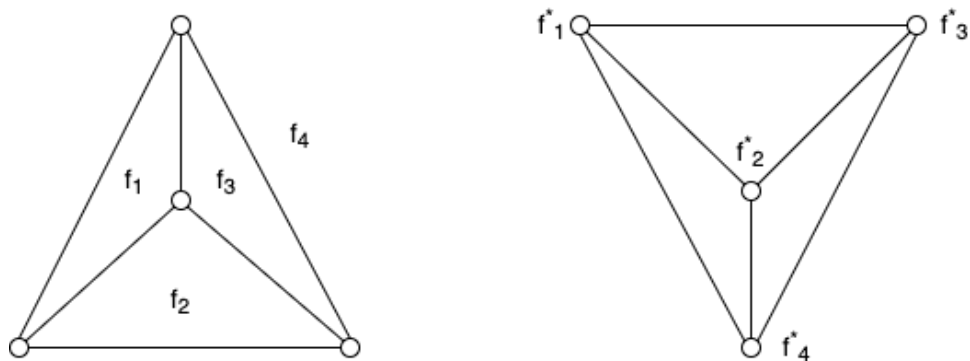


Figura 5.4: Um grafo plano G (à esquerda) e o seu dual G^* (à direita).

Em grafos planares, podemos atribuir cargas tanto aos vértices do grafo quanto aos vértices do seu dual, que correspondem às faces no grafo original.

5.1 Atribuição inicial de cargas

A seguir, apresentaremos a conhecida Fórmula de Euler, que nos permite obter três equações relacionando os graus de vértices e faces de grafos planos. Por sua vez, essas equações geram três possibilidades distintas para a atribuição de cargas a um grafo plano em provas que utilizam o método da descarga.

Teorema 7. (*Fórmula de Euler*) *Se G é um grafo plano conexo, então temos*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Demonstração. Provaremos por indução em $|F(G)|$. Se $|F(G)| = 1$, toda aresta de G é uma aresta de corte e, por ser conexo, G é uma árvore. Nesse caso, $|E(G)| = |V(G)| - 1$ e a fórmula vale. Agora suponha que a fórmula vale para todos os grafos planos conexos com menos que f faces, onde $f \geq 2$, e seja G um grafo conexo com f faces. Seja e uma aresta em G que não é uma aresta de corte. Então $G - e$ é um grafo plano conexo com $f - 1$ faces, pois as duas faces em G separadas por e formam uma única face em $G - e$. Pela hipótese de indução,

$$|V(G - e)| - |E(G - e)| + |F(G - e)| = 2.$$

Usando as relações

$$|V(G - e)| = |V(G)|, \quad |E(G - e)| = |E(G)| - 1, \quad \text{e} \quad |F(G - e)| = |F(G)| - 1,$$

obtemos

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula é válida para todo grafo plano conexo. \square

Lema 3. *Se G é um grafo plano, então temos que $\sum_{f \in F(G)} l(f) = 2|E(G)|$.*

Para se convencer de que o lema acima é verdadeiro, basta notar que toda aresta contribui com 2 na contagem dos graus das faces: toda aresta de corte é contabilizada duas vezes para a face que a contém e toda aresta que não é uma aresta de corte é contabilizada uma vez para cada uma das duas faces separadas pela aresta. Um raciocínio similar é usado para provar que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$.

Utilizando o Lema 3 e a Fórmula de Euler (Teorema 7), deduziremos a seguir três equações que serão utilizadas nos tipos de carregamento (i.e, atribuição de cargas iniciais) chamados **carregamento por vértices**, **carregamento por faces** e **carregamento balanceado**.

Lema 4. Se G é um grafo plano, então temos que

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2l(f) - 6) = -12. \quad (5.1)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= 2 \\ -6|V(G)| + 6|E(G)| - 6|F(G)| &= -12 \\ -6|V(G)| + 2|E(G)| + 4|E(G)| - 6|F(G)| &= -12 \\ -6|V(G)| + \sum_{v \in V(G)} d(v) + \sum_{f \in F(G)} 2l(f) - 6|F(G)| &= -12 \\ \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2l(f) - 6) &= -12. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 5. Se G é um grafo plano, então temos que

$$\sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (l(f) - 6) = -12. \quad (5.2)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= 2 \\ -6|V(G)| + 6|E(G)| - 6|F(G)| &= -12 \\ -6|V(G)| + 4|E(G)| + 2|E(G)| - 6|F(G)| &= -12 \\ -6|V(G)| + \sum_{v \in V(G)} 2d(v) + \sum_{f \in F(G)} l(f) - 6|F(G)| &= -12 \\ \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (l(f) - 6) &= -12. \quad \square \end{aligned}$$

Lema 6. Se G é um grafo plano, então temos que

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (l(f) - 4) = -8. \quad (5.3)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} |V(G)| - |E(G)| + |F(G)| &= 2 \\ -4|V(G)| + 4|E(G)| - 4|F(G)| &= -8 \\ -4|V(G)| + 2|E(G)| + 2|E(G)| - 4|F(G)| &= -8 \\ -4|V(G)| + \sum_{v \in V(G)} d(v) + \sum_{f \in F(G)} l(f) - 4|F(G)| &= -8 \\ \sum_{v \in V(G)} (d(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (l(f) - 4) &= -8. \quad \square \end{aligned}$$

Em cada um dos três tipos de carregamento explicitados abaixo, a soma das cargas dos vértices e das faces do grafo corresponderá a uma das equações deduzidas acima. Ao utilizar qualquer um desses tipos de carregamento em uma prova pelo método da descarga, nosso objetivo será fazer com que todo vértice e face termine com carga não-negativa,

contradizendo o lado direito de cada equação. Neste caso, dizemos que o vértice (resp. a face) termina a etapa de descarga **satisfeito** (resp. satisfeita)

No chamado **carregamento por vértices**, cada vértice $v \in V(G)$ recebe carga $d(v) - 6$ e cada face $f \in F(G)$ recebe carga $2l(f) - 6$. Assim a equação 5.1 corresponde à soma das cargas das faces e dos vértices. Essa escolha de cargas é útil quando lidamos com triangulações (conceito definido mais à frente nesse capítulo), já que toda face terá carga igual a zero.

Quando utilizamos o **carregamento por faces**, cada vértice $v \in V(G)$ recebe carga $2d(v) - 6$ e cada face $f \in F(G)$ recebe carga $l(f) - 6$. Assim a equação 5.2 corresponde à soma das cargas das faces e dos vértices. Se estamos lidando com um grafo 3-regular, esse tipo de carregamento será útil, já que todo vértice terá carga igual a zero.

Por fim, quando utilizamos o **carregamento balanceado**, cada vértice $v \in V(G)$ recebe carga $d(v) - 4$ e cada face $f \in F(G)$ recebe carga $l(f) - 4$. Assim a equação 5.3 corresponde à soma dos graus das faces e dos vértices. Nesse caso, somente 3-vértices e faces com comprimento no máximo 3 precisarão receber carga.

5.2 Exemplos

Nas demonstrações a seguir veremos exemplos de aplicações dos diferentes carregamentos a grafos planares.

Teorema 8. [Hli] *Todo grafo plano sem faces de comprimento menor que 3 possui um vértice com grau no máximo 5.*

Demonstração. Consideremos um grafo plano G . Aplicamos carregamento por vértices em G . Temos que a soma dos graus dos vértices e das faces de G é

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2l(f) - 6) = -12. \quad (5.4)$$

Como toda face tem comprimento pelo menos 3, temos que $\sum_{f \in F(G)} (2l(f) - 6) \geq 0$. Mas o lado direito da equação é negativo, portanto $\sum_{v \in V(G)} (d(v) - 6) < 0$. Isso implica que existe um vértice $v \in V(G)$ tal que $d(v) - 6 < 0$, isto é, $d(v) \leq 5$. \square

Para o próximo exemplo, definiremos o conceito de **triangulação plana**. Uma triangulação plana é um grafo plano conexo onde todas as faces possuem grau três.

Teorema 9. [Wes01] *Se G é uma triangulação plana com $\delta(G) = 5$, então G deve conter pelo menos uma das configurações abaixo:*

- Dois 5-vértices adjacentes;
- Um 5-vértice adjacente a um 6-vértice.

Demonstração. Nessa prova, utilizaremos o carregamento por vértices. Para todo vértice v , atribuiremos carga $d(v) - 6$ e, para toda face f , atribuiremos carga $2l(f) - 6$. Como G é

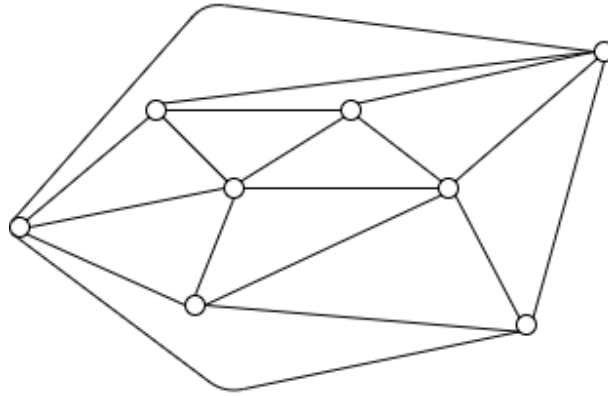


Figura 5.5: Exemplo de triangulação plana.

uma triangulação, toda face tem grau 3 e $2l(f) - 6 = 0$. Portanto, a soma total das cargas dos vértices e das faces de G é igual a -12 . A seguir, temos nossa regra de descarga:

- Regra 1: Todo 5-vértice toma carga $\frac{1}{5}$ de cada um dos seus vizinhos.

Suponha que G não contém nenhuma das duas configurações do enunciado. Note que, nesse caso, todo 5-vértice tem carga final zero, já que ele toma carga total 1 dos seus vizinhos. Da mesma forma, todo 6-vértice também termina a etapa de descarga satisfeito, já que não há nenhum 5-vértice adjacente para tomar sua carga. Então basta provar que todo 7⁺-vértice termina satisfeito.

Para que um 7-vértice termine insatisfeito, é necessário que ele possua seis 5-vértices na sua vizinhança. No entanto, como se trata de uma triangulação plana, isso implicaria na existência de dois 5-vértices adjacentes. Portanto, todo 7-vértice termina satisfeito. Agora seja v um 8⁺-vértice de grau k . Para que o vértice v termine insatisfeito, é necessário que existam $6(k - 6)$ 5-vértices na sua vizinhança. No entanto, $6(k - 6) > k$ quando $k > 7$. Portanto, todos os vértices terminam satisfeitos, contradizendo a hipótese sobre a não existência das configurações. \square

Nosso próximo exemplo utiliza o conceito de reservatório de carga apresentado no Capítulo 4 aplicado ao contexto de grafos planares. Como conceito preliminar necessário para a prova, temos o conceito de circuito 2-alternante. Um circuito 2-alternante é um circuito que alterna entre vértices de grau 2 e vértices de grau diferente de 2.

Teorema 10. [Bor90] Se G é um grafo plano com $\delta(G) \geq 2$, então G contém

- Configuração 1: uma aresta uv onde $d(u) + d(v) \leq 15$, ou
- Configuração 2: um circuito 2-alternante.

Demonstração. Suponha que, para toda aresta uv em G , $d(u) + d(v) \geq 16$ e G não possui um circuito 2-alternante. Consequentemente, todo vizinho de um 2-vértice é um 14⁺-vértice.

Para essa prova, utilizaremos o carregamento por faces: atribuímos carga $2d(v) - 6$ para todo vértice v e carga $l(f) - 6$ para toda face f . Também manteremos um reservatório de carga com carga inicial igual a 0.

- Regra 1: todo 14^+ -vértice doa carga 1 para o reservatório e todo 2^- -vértice toma carga 1 do reservatório.
- Regra 2: todo 4^+ -vértice distribui a sua carga remanescente após a aplicação da Regra 1 igualmente entre as suas faces incidentes.
- Regra 3: toda face f tal que $l(f) \geq 4$ doa carga 1 para cada 2^- -vértice incidente.

Primeiro, demonstraremos que o reservatório de carga possui carga final não-negativa. Seja U o conjunto de 2^- -vértices de G e W o conjunto de 14^+ -vértices de G . Seja H o subgrafo com vértices $U \cup W$ e cujas arestas são o conjunto de arestas com uma extremidade em U e outra em W . Como a configuração 2 não ocorre em G , H deve ser uma floresta. Portanto, $2|U| = |E(H)| < |U| + |W|$. Logo, $|U| < |W|$, o que significa que o reservatório de carga tem carga final não-negativa.

Um 2^- -vértice v tem carga inicial -2 . Ele toma carga 1 do reservatório e, como v deve ser incidente a uma 4^+ -face, v também toma carga 1 de alguma 4^+ -face incidente. Dessa forma, todo 2^- -vértice termina satisfeito. Todo 3^- -vértice tem carga inicial 0 e não doa nem recebe carga, terminando satisfeito. Todo 4^+ -vértice termina com carga 0 após a aplicação da Regra 2.

Resta-nos provar que toda face termina satisfeita. Uma face f recebe carga dos seus 4^+ -vértices incidentes. A face f recebe carga $\frac{2j-7}{j}$ de todo 14^+ -vértice de grau j incidente e $\frac{2j-6}{j}$ de todo 4^+ -vértice incidente de grau $j < 14$. De todo modo, f recebe carga pelo menos $1/2$ de cada 4^+ -vértice incidente. Se f não possui nenhum 3^- -vértice incidente, então f recebe carga no mínimo $l(f)/2$ e não doa carga, tendo carga final $\frac{3l(f)}{2} - 6$. Como $l(f) \geq 4$, concluímos que f termina satisfeita.

Suponha que f possui pelo menos um 3^- -vértice incidente. Seja k o menor grau de um vértice incidente em f . Como a Configuração 1 está proibida, f deve ser incidente a dois 13^+ -vértices.

- Caso 1: f tem grau 3. Se f é incidente a dois 14^+ -vértices, então f recebe carga no mínimo $2(2 \cdot 14 - 7)/14 = 3$. Se f é incidente a dois 13^- -vértices, então f recebe carga no mínimo $2(2 \cdot 13 - 6)/13 > 3$. Portanto, f tem carga inicial -3 e carga final não-negativa.
- Caso 2: f tem grau ≥ 4 . Se f tem exatamente um 2^- -vértice incidente, então f recebe carga no mínimo 3 e doa carga 1. Se f tem pelo menos dois 2^- -vértices adjacentes, f deve possuir pelo menos a mesma quantidade de 14^+ -vértices incidentes, de forma que todo 2^- -vértice incidente possui dois 14^+ -vizinhos, que contribuem com carga $3/2$, como demonstrado acima.

Portanto, podemos associar todo 2^- -vértice incidente a f com um 14^+ -vizinho de forma injetiva. Cada um desses pares contribui para f carga pelo menos $1/2$. Como G não possui um circuito 2-alternante, então deve existir algum 14^+ -vértice que não pertence a nenhum par, contribuindo com carga pelo menos $3/2$ para f . Por fim, toda face com grau ≥ 4 recebe carga maior que 2, terminando satisfeita.

Portanto, toda face termina satisfeita, concluindo a prova por contradição. \square

Nosso próximo exemplo também utiliza o conceito de reservatório de carga, porém, dessa vez, utilizaremos o carregamento balanceado. Mas antes, apresentamos alguns

conceitos preliminares.

Da mesma forma que definimos os conceitos de um grafo L -colorível, k -seleccionável e o conceito de número cromático de lista, temos definições análogas, mas dessa vez tratando de colorações de arestas. Uma **atribuição de listas para arestas** (*edge-list assignment*) L atribui listas de cores a arestas de um grafo G . Dada uma atribuição de listas para arestas L , uma **L -coloração de arestas** é uma coloração própria das arestas de G (arestas adjacentes não possuem a mesma cor) onde, para toda aresta e de G , a cor atribuída a e pertence a $L(e)$. Um grafo é **k -seleccionável para arestas** (*k-edge-choosable*) se G é L -colorível para arestas (*L-edge-colorable*) sempre que toda lista $L(e)$ tem tamanho pelo menos k . O **número cromático de lista para arestas** *list edge-chromatic number* de G , denotado por $\chi'_l(G)$, é o menor k tal que G é k -seleccionável para arestas.

Teorema 11. [Bor90] *Se G é um grafo planar e $\Delta(G) \geq 9$, então $\chi'_l(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Seja G um contraexemplo minimal, com uma atribuição de listas L para as arestas de G tal que cada lista tem tamanho $\Delta(G) + 1$ e G não possui uma L -coloração de arestas. Uma aresta uv onde $d(u) + d(v) \leq \Delta(G) + 2$ é uma configuração redutível. Portanto, podemos assumir que $\delta(G) \geq 3$ e que todo vizinho de um j -vértice tem grau pelo menos $\Delta(G) + 3 - j$. Seja $k = \Delta(G)$. Como $k \geq 9$, a soma dos graus de quaisquer dois vértices adjacentes é pelo menos 12. Nós usamos o carregamento balanceado, com carga inicial para vértice igual ao grau do vértice e carga para face igual ao seu comprimento menos 4. Inicialmente, o reservatório de carga está vazio.

- Regra 1: Todo 3-vértice toma carga 1 do reservatório e todo k -vértice doa carga $1/2$ ao reservatório.
- Regra 2: Toda face de comprimento 3 toma carga $1/2$ de cada 8^+ -vértice incidente e $\frac{j-4}{j}$ de cada j -vértice incidente, com $j \in \{5, 6, 7\}$.

Para garantir carga não-negativa no reservatório, nós provamos que $n_k > 2n_3$, onde n_j é o número de j -vértices em G . As arestas incidentes a 3-vértices formam um grafo bipartido H ; com bipartição formada pelo conjunto dos 3-vértices e pelo conjunto dos k -vértices de G . Se H tem um circuito C , então C tem comprimento par, pois H é bipartido. Pela minimalidade do contraexemplo, $G - E(C)$ possui uma L -coloração de arestas. Cada aresta em C é incidente a $\Delta(G) - 1$ arestas, que já foram coloridas, de forma que restam pelo menos duas cores disponíveis para cada aresta. Como circuitos pares são 2-seleccionáveis para arestas, essa L -coloração de arestas pode ser estendida a G . Como G é um contraexemplo, podemos então assumir que H é acíclico e, portanto, possui menos que $n_3 + n_k$ arestas. Como H possui $3n_3$ arestas, temos que $3n_3 < n_3 + n_k$, como queríamos provar.

Para os vértices, a regra 1 imediatamente satisfaz os 3-vértices. Um j -vértice com $j \in \{4, 5, 6, 7\}$ perde carga no máximo $j - 4$, que é sua carga inicial. Um 8-vértice perde carga no máximo 4, já que $k \geq 9$. Para $j \geq 9$, um j -vértice perde carga no máximo $\frac{j+1}{2}$, possivelmente enviando carga $1/2$ para o reservatório, terminando satisfeito.

Em relação às faces, as faces de comprimento pelo menos 4 não perdem carga e permanecem satisfeitas. Devemos mostrar que toda face f de comprimento 3 ganha carga pelo menos 1. Seja j o menor grau dentre os vértices incidentes a f . Se $j \leq 4$, então dois

8^+ -vértices incidentes doam carga $1/2$ cada. Se $j = 5$, então dois 7^+ -vértices incidentes doam carga pelo menos $3/7$ cada, mais a carga $1/5$ doada pelo 5 -vértice. Se $j \geq 6$, então cada vértice incidente a f doa carga pelo menos $1/3$. Em todos os casos, f termina satisfeita. \square

5.3 O Teorema das Quatro Cores

Esta seção tem como objetivo apresentar ao leitor o famoso Teorema das Quatro Cores, sua história e impacto. O teorema possui relevância para este texto porque, além de ser um problema com uma rica história, foi o grande marco de aplicação do método da descarga. Por ser um teorema com uma prova bastante complexa, não entraremos em detalhes nela, focando em ideias gerais.

O Teorema das Quatro Cores é enunciado da seguinte forma:

Teorema 12. *Todo grafo planar possui uma coloração própria dos seus vértices utilizando apenas quatro cores.*

Esse teorema remonta ao ano 1852, quando o matemático sul africano Francis Guthrie, enquanto tentava colorir o mapa dos municípios da Inglaterra, percebeu que apenas quatro cores pareciam bastar para garantir que dois municípios adjacentes sempre tivessem cores distintas. [Tho98]. Francis perguntou ao seu irmão Frederick se essa afirmação era válida para todo mapa. Frederick Guthrie, por sua vez, apresentou o problema a um de seus professores, o matemático britânico Augustus De Morgan [Tho98].

A partir disso, o problema foi divulgado em publicações e houve várias tentativas de responder a essa pergunta, agora feita na linguagem dos grafos, já que um mapa geográfico pode ser modelado como um grafo plano. Em 1879, Alfred Kempe publicou uma suposta prova que foi bem aceita na comunidade matemática [Bal08]. No entanto, em 1890, 11 anos depois, o matemático Percy Heawood apontou um erro na prova de Kempe [Tho98]. Embora Kempe não tenha resolvido o problema, a técnica das cadeias de Kempe, apresentada nessa tentativa, acabou por se tornar uma técnica muito útil em teoria dos grafos [Cal01].

A partir das contribuições do alemão Heinrich Heesch, o primeiro a aplicar os conceitos do método da descarga nesse problema, a dupla Appel e Haken conseguiu, somente em 1977, formular a primeira prova para o Teorema das Quatro Cores [Tho98]. Essa prova, no entanto, gerou desconfiança na comunidade matemática: Appel e Haken tiveram o auxílio de um programa de computador para confirmar a redutibilidade das 1482 configurações utilizadas no método da descarga [Cas01]. Durante a formulação da prova, foram utilizadas mais de 1200 horas de execução de um algoritmo em 3 máquinas diferentes [Cas01]. Em 1993, Daniel Sanders, Paul Seymour e Robin Thomas, também utilizando o método da descarga, conseguiram simplificar a prova do Teorema das Quatro Cores: dessa vez foram utilizadas 633 configurações redutíveis, em vez das 1482 de Appel e Haken.

Vale destacar que, na prova de Sanders et al, o conceito de configuração é diferente do conceito utilizado nos teoremas tratados nessa monografia. Na prova, uma configuração K

consiste em uma semi-triangulação G (grafo plano onde toda face interna é triangular) e uma função g de $V(G)$ para os números inteiros com as seguintes propriedades [Tho]:

- Para todo vértice v , $G - v$ tem no máximo dois componentes conexos e, se existem dois, então o grau de v é $g(v) - 2$,
- Para todo vértice v , se v não é incidente à face externa, então $g(v)$ é igual ao grau de v e, caso contrário, $g(v)$ é maior que o grau de v . Em ambos os casos, $g(v) > 4$,
- K tem um tamanho de anel (*ring-size*) maior ou igual a 2, sendo que o tamanho de anel é definido como a soma dos termos $g(v) - d(v) - 1$ para todos os vértices v incidentes à face externa tais que $G - v$ é conexo.

Para a etapa de prova de inevitabilidade das configurações, é provado que pelo menos uma das 633 configurações aparece em qualquer triangulação plana internamente 6-conexa. Não nos preocuparemos em definir esse conceito: para o propósito de delinear a prova, basta saber que todo contraexemplo minimal para o Teorema das Quatro Cores é uma triangulação plana internamente 6-conexa [Tho].

Através desse breve panorama sobre a história do teorema, é possível entender a sutileza do método da descarga: a arte de escolher o conjunto certo de configurações redutíveis e as regras de descarga mais convenientes. Vimos como essas escolhas podem simplificar dramaticamente uma prova. Devemos manter isso em mente ao atacarmos novos problemas.

Capítulo 6

Códigos de identificação

Dado um grafo G , definimos a **vizinhança fechada** de $v \in V(G)$ como $N[v] := N(v) \cup \{v\}$.

Um **código de identificação** em G é um subconjunto C de vértices de G tal que a vizinhança fechada de todo vértice de G possui pelo menos um elemento pertencente a C ; e quaisquer dois vértices distintos $u, v \in G$ não possuem vizinhanças fechadas idênticas em C .

Formalmente, dado um grafo G , um conjunto $C \subseteq V(G)$ é um código de identificação se e somente se as duas afirmações a seguir forem verdadeiras:

- Para todo $v \in G$, $N[v] \cap C \neq \emptyset$.
- Para todos $u, v \in V(G)$ tais que $u \neq v$, $N[u] \cap C \neq N[v] \cap C$.

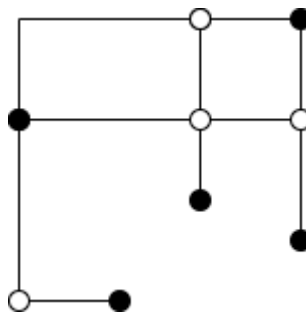


Figura 6.1: Exemplo de código de identificação (vértices preenchidos) em um grafo.

Para entendermos melhor esse conceito, vale a pena mencionarmos aqui uma aplicação em sistemas de multiprocessadores (que justifica a terminologia). Considere um tal sistema, modelado como um grafo: os vértices correspondem aos processadores e as arestas indicam que há comunicação direta entre os processadores. Um código de identificação, digamos C , de um tal grafo pode ser interpretado como um conjunto de processadores responsáveis por reportar falhas no sistema. Considere que todo processador em C possui uma rotina de diagnóstico de falhas para si mesmo e para seus vizinhos e que, ao detectar uma falha em algum vértice na sua região, ele emite um *bit* 1 como sinalização. Através desse

sinal, é possível identificar quais os processadores defeituosos no sistema. De fato, isto ocorre porque todo processador possui uma vizinhança única no código de identificação (e portanto, cada processador cuja vizinhança em C emitiu o sinal fica perfeitamente definido). Vale observar que nem todo grafo admite um código de identificação.

O mesmo conceito pode ser aplicado para detecção de intrusos ou detecção de incêndios em edifícios ou instalações industriais: basta modelarmos a complexa rede de corredores, portões e salas como um grafo e distribuir os sensores de forma a criar-se um código de identificação.

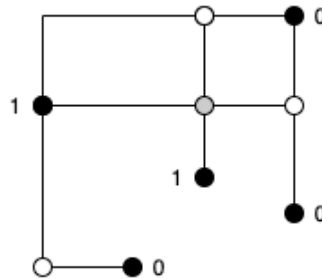


Figura 6.2: Nessa figura, o vértice destacado em cinza corresponde ao processador defeituoso, sendo identificado pelos seus dois vizinhos pertencentes ao código de identificação, que estão emitindo um bit 1.

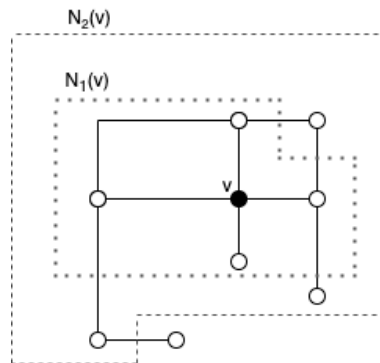


Figura 6.3: Os conjuntos $N_1[v]$ e $N_2[v]$ estão indicados em linhas pontilhadas e tracejadas, respectivamente.

Sejam G um grafo e d um inteiro não negativo. Para todo $v \in V(G)$, defina $N_d[v]$ como o conjunto de vértices à distância no máximo d de v .

A seguir, demonstraremos um resultado simples porém fundamental a respeito da existência de códigos de identificação.

Teorema 13. [Sta11] Para qualquer grafo G , as seguintes afirmações são equivalentes:

1. G tem um código de identificação;
2. $V(G)$ é um código de identificação;

3. $N[u] \neq N[v]$ para quaisquer $u, v \in V(G)$ distintos.

Demonstração.

- (1) implica (2): Seja $C \subseteq V(G)$ um código de identificação. Note que, para qualquer $v \in V(G)$, $C \cup \{v\}$ também é um código de identificação. Portanto, $V(G)$ é um código de identificação.
- (2) implica (1): Óbvio.
- (2) implica (3): Seja $C = V(G)$ um código de identificação. Então $N[v] \cap C = N[v]$ para todo $v \in V(G)$. Logo, para quaisquer vértices u e v distintos, como $N[v] \cap C \neq N[u] \cap C$, temos que $N[u] \neq N[v]$.
- (3) implica (2): Tome $C = V(G)$. Sabemos que $N[v] \cap C = N[v]$ e, portanto, $N[v] \cap C \neq \emptyset$. Sendo u e v vértices distintos, como $N[u] \neq N[v]$, temos que $N[v] \cap C \neq N[u] \cap C$. Logo, $V(G)$ é um código de identificação. \square

Pelo Teorema 13, vemos que nem todo grafo possui um código de identificação. Basta notar que se G é um grafo completo, então claramente G não satisfaz o item (3). Ao longo desse capítulo, sempre assumiremos que os grafos em questão possuem códigos de identificação, a não ser quando indicado explicitamente.

Deste ponto em diante, vamos considerar grafos infinitos, em especial, grades infinitas. A **densidade** de um código de identificação $C \subseteq V(G)$ em um grafo G é definida como

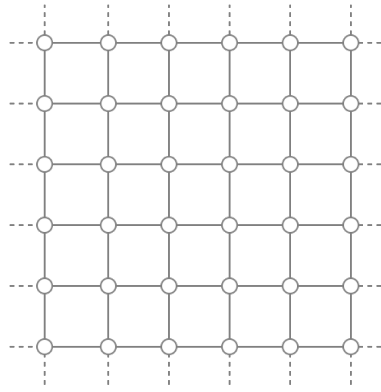
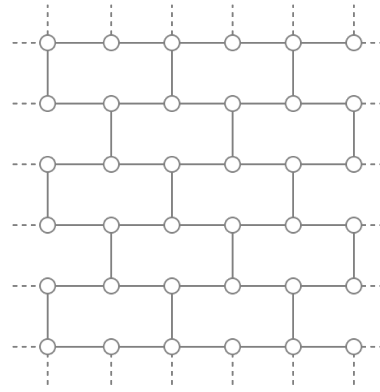
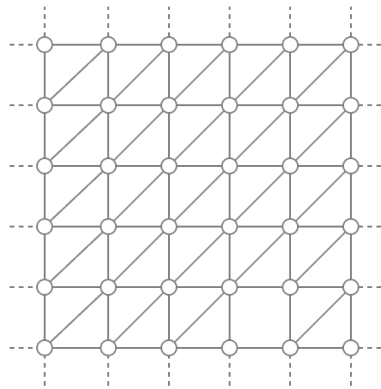
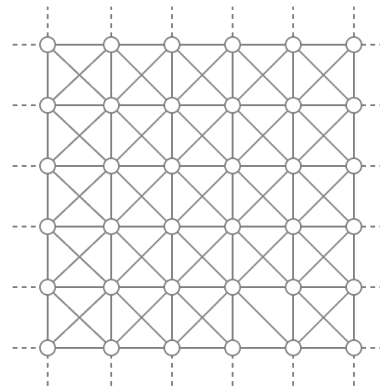
$$d(C, G) := \limsup_{d \rightarrow +\infty} \frac{|C \cap N_d(v')|}{|N_d(v')|},$$

onde v' é um vértice arbitrário em G .

Um problema de interesse é a determinação da **densidade mínima** de um código de identificação. Para um grafo G , esse parâmetro é denotado por $d^*(G)$. Se G é um grafo finito, $d^*(G) = |C^*|$, onde C^* é um código de identificação de cardinalidade mínima. O método da descarga tem sido utilizado com sucesso para provar resultados a respeito de densidade mínima em uma classe de grafos conhecidos como **grades**. Definiremos alguns grafos dessa classe a seguir.

Definiremos quatro tipos de grades infinitas: grade quadrada (denotada por \mathcal{G}_S), grade triangular (denotada por \mathcal{G}_T), grade hexagonal (denotada por \mathcal{G}_H) e grade king (denotada por \mathcal{G}_K). Todos esses quatro tipos de grades são grafos infinitos cujos vértices são pares em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. As suas arestas são definidas da seguinte forma [Dan19]:

- $E(\mathcal{G}_S) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0)\}\}$,
- $E(\mathcal{G}_T) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, (-1)^{i+j+1}), (\pm 1, 0)\}$, onde $(i, j) = u\}$,
- $E(\mathcal{G}_H) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (1, 1), (-1, -1)\}\}$,
- $E(\mathcal{G}_K) = \{\{u, v\} : u - v \in \{(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, 1), (\pm 1, -1)\}\}$.

Grade quadrada (\mathcal{G}_S)Grade hexagonal (\mathcal{G}_H)Grade triangular (\mathcal{G}_T)Grade king (\mathcal{G}_K)

Para cada uma das grades infinitas definidas, podemos também definir uma grade infinita com número limitado de linhas:

- A grade quadrada infinita com $k \geq 1$ linhas é denotada por \mathcal{S}_k .
- A grade hexagonal infinita com $k \geq 1$ linhas é denotada por \mathcal{H}_k .
- A grade triangular infinita com $k \geq 1$ linhas é denotada por \mathcal{T}_k .
- A grade king infinita com $k \geq 1$ linhas é denotada por \mathcal{K}_k .

O conjunto das arestas de uma grade infinita com $k \geq 1$ linhas é definido de forma análoga à sua contraparte infinita, porém seu conjunto de vértices é $\mathbb{Z} \times \{1, 2, 3, \dots, k\}$.

O método da descarga pode ser aplicado para encontrar limitantes inferiores para a densidade mínima de um código de identificação em certos grafos. A aplicação do método se dá da seguinte forma: seja G um grafo e C um código de identificação qualquer em G . Atribuímos carga inicial igual a 1 para todo vértice de C e 0 para os vértices que não pertencem a C . Para todo $v \in V(G)$, denotaremos a carga inicial de v por $chrg(v)$ e a carga final de v por $chrg^*(v)$. Distribuímos as cargas entre os vértices de acordo com regras de descarga escolhidas e de forma que, para constantes d_G^* e m_G^* , não seja transferida carga de um vértice para outro a uma distância maior que d_G^* e em quantidade maior que m_G^* . Ou seja, sempre transferimos carga a uma distância finita e em quantidade finita.

Suponha que, ao final da aplicação das regras de descarga, todo vértice do grafo tenha carga final maior ou igual a uma constante x . Seja $v_0 \in V(G)$ um vértice arbitrário. Para todo r , defina $in_r(v_0)$ como a quantidade de carga que é transferida de vértices em $V(G) \setminus N_r(v_0)$ para vértices em $N_r(v_0)$. Temos que:

$$|C \cap N_r(v_0)| = \sum_{v \in N_r(v_0)} \text{chrg}(v) \geq \sum_{v \in N_r(v_0)} \text{chrg}^*(v) - in_r(v_0) \geq x|N_r(v_0)| - in_r(v_0). \quad (6.1)$$

Substituindo o numerador $|C \cap N_r(v_0)|$ na definição de densidade de um código de identificação pelo valor obtido na inequação 6.1, temos:

$$\begin{aligned} d(C, G) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{|C \cap N_r(v_0)|}{|N_r(v_0)|} \geq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{x|N_r(v_0)| - in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|} \\ &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|} \right). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Note que, se $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|} = 0$, então $d(C, G) \geq x$. Dessa forma, provaríamos que x é um limitante inferior para a densidade mínima de um código de identificação em G . Além disso, se encontrássemos um código de identificação com densidade exatamente x , teríamos que x é de fato a densidade mínima.

A respeito do limite $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|}$, listamos abaixo alguns casos onde o mesmo é igual a 0:

- Se G for um grafo finito, então $in_r(v_0)$ será igual a 0 para um r suficientemente grande. Logo, $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|}$ será 0.
- Para grades triangulares infinitas com k linhas, temos que $in_r(v_0) \leq 2d_{\mathcal{T}_k}^* \cdot k \cdot m_{\mathcal{T}_k}^*$, de forma que $\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{in_r(v_0)}{|N_r(v_0)|} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{2d_{\mathcal{T}_k}^* \cdot k \cdot m_{\mathcal{T}_k}^*}{|N_r(v_0)|} = 0$, pois $2d_{\mathcal{T}_k}^* \cdot k \cdot m_{\mathcal{T}_k}^*$ é uma constante [DHS17].
- Para grades hexagonais infinitas, temos que $in_r(v_0)$ é linear em r e $|N_r(v_0)|$ é quadrático em r , portanto o limite também é igual a 0 [CY10].

Portanto, para os exemplos acima a aplicação do método da descarga teria encontrado um limitante inferior para a densidade mínima de um código de identificação.

A seguir veremos uma aplicação concreta do método da descarga para encontrar a densidade mínima de um código de identificação em grades infinitas. Antes disso, apresentamos uma definição: Seja G um grafo e D um código de identificação. Um **n-cluster** C é um conjunto de n vértices em D tal que todo vértice na vizinhança desse conjunto não pertence ao código de identificação, ou seja, $N(C) \cap D = \emptyset$. Por exemplo, um 1-cluster é um vértice pertencente a D tal que nenhum de seus vizinhos pertence a D .

Teorema 14. [CY10] *Numa grade hexagonal infinita, a densidade de qualquer código de identificação é maior ou igual a $\frac{2}{5}$.*

Demonstração. Seja D um código de identificação em \mathcal{G}_H . Atribuímos carga 1 para cada vértice em D . Nosso objetivo é redistribuir as cargas de forma que todo vértice do grafo

tenha carga final maior ou igual a $\frac{2}{5}$, provando que a densidade de D em \mathcal{G}_H é maior ou igual a $\frac{2}{5}$.

Temos uma única regra de descarga: Se $v \in D$ é adjacente a $w \notin D$ e w tem k vizinhos em D , então v doa carga $\frac{2}{5k}$ para w .

Agora iremos verificar as cargas finais de cada vértice após a aplicação da regra de descarga. Note que \mathcal{G}_H é um grafo 3-regular.

Se $v \notin D$, então v recebe carga $k(\frac{2}{5k}) = \frac{2}{5}$.

Se v é um 1-cluster, note que cada vizinho w de v tem pelo menos um outro vizinho em D , pois $N[v] \cap D \neq N[w] \cap D$. Então v doa no máximo $\frac{1}{5}$ para cada vizinho, tendo carga final pelo menos $1 - 3(\frac{1}{5}) = \frac{2}{5}$.

Note que nenhum código de identificação pode conter um 2-cluster, pois se dois vértices $u, v \in D$ formassem um 2-cluster, então teríamos que $N[u] \cap D = N[v] \cap D$, uma contradição. Seja C um 3⁺-cluster e $v \in C$.

Se $d_C(v) = 1$, então v possui dois vizinhos v_1 e v_2 que não estão em D . Como $N[v_1] \cap D \neq N[v_2] \cap D$, segue que v_1 ou v_2 deve possuir um vizinho em D diferente de v . Portanto, v doa carga no máximo $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$, tendo carga final pelo menos $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Se $d_C(v) = 2$, então v doa carga no máximo $\frac{2}{5}$, tendo carga final pelo menos $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

Por fim, se $d_C(v) = 3$, então v não doa carga, tendo carga final igual a 1. Como a carga final de cada vértice é maior ou igual a $\frac{2}{5}$, a densidade de D é maior ou igual a $\frac{2}{5}$. \square

Note que essa prova não fez uso da estrutura da grade, mas apenas o fato de ser 3-regular. Em seguida provaremos uma generalização do limitante inferior provado acima para grafos k -regulares.

Teorema 15. [CY10] Num grafo r -regular com $r > 1$, qualquer código de identificação tem densidade maior ou igual a $\frac{1}{1+r/2}$.

Demonstração. Seja G um grafo r -regular e D um código de identificação em G . Atribuímos carga 1 para todo vértice em D e definimos a seguinte regra de descarga: se $v \in D$ é adjacente a $w \notin D$ e w tem k vizinhos em D , então v doa carga $\frac{1}{k(1+r/2)}$ para w .

Aplicamos a regra de descarga e verificamos que todo vértice do grafo possui carga final maior ou igual a $\frac{1}{1+r/2}$.

Se $v \notin D$ e v tem k vizinhos em D , então v recebe carga $\frac{k}{k(1+r/2)} = \frac{1}{1+r/2}$.

Se v é um 1-cluster, note que cada vizinho w de v tem pelo menos um outro vizinho em D , pois $N(v) \cap D \neq N(w) \cap D$. Portanto, v doa no máximo $\frac{1}{2(1+r/2)}$ para cada vizinho, tendo carga final pelo menos $1 - \frac{r}{2(1+r/2)} = \frac{1}{1+r/2}$.

Note que nenhum código de identificação pode conter um 2-cluster, como no caso anterior ($r = 3$). Seja C um 3⁺-cluster e $v \in C$ tal que v possui k vizinhos que não estão em D .

Se $k = 1$, então v doa no máximo $\frac{1}{1+r/2}$, tendo carga final $1 - \frac{1}{1+r/2} = \frac{r/2}{1+r/2} \geq \frac{1}{1+r/2}$.

Se $2 \leq k \leq r-1$, então v doa no máximo $\frac{r-1}{2(1+r/2)}$ e tem carga final pelo menos $1 - \frac{r-1}{2(1+r/2)} = \frac{3/2}{1+r/2} > \frac{1}{1+r/2}$.

No caso em que $k = r$, v não doa carga e tem carga final igual a 1. Logo, todos os vértices do grafo terminam a etapa de descarga com carga maior ou igual a $\frac{1}{(1+\frac{r}{2})}$. \square

Capítulo 7

Conclusão

Como pudemos ver, o método da descarga possui uma rica história e uma extensa área de aplicação. Ao longo da monografia, apresentamos de forma detalhada as etapas que compõem uma prova pelo método da descarga, com exemplos passo a passo. Também destacamos certas variações ou incrementos da técnica, como o uso dos reservatórios de carga e as regras de carregamento características para grafos planares, ambas merecendo seus próprios capítulos.

A respeito dos códigos de identificação, apresentamos os conceitos envolvidos e a motivação para estudarmos problemas sobre tais códigos. Também vimos como o método da descarga foi aplicado na literatura para estudar densidades mínimas de códigos de identificação para a classe de grafos conhecidos como grades.

Este texto foi concebido para ser um guia didático sobre o método da descarga. Ele cobre diversas aplicações do método da descarga, contribuindo para que o leitor se familiarize com o assunto. Esperamos que este texto seja útil para aqueles que pretendem atacar problemas com essa nova ferramenta.

Referências

- [Bal08] W. W. ROUSE BALL. *Mathematical Recreations and Essays*. Project Gutenberg, 2008 (citado na pg. 25).
- [BIN16] O. V. BORODIN, A. O. IVANOVA e T. K. NEUSTROEVA. “Sufficient conditions for planar graphs with girth 6 to be 2-distance colourable”. Em: *Siberian Electronic Mathematical Reports* 3 (2016), pgs. 441–450. URL: <http://semr.math.nsc.ru/v3.html> (citado na pg. 14).
- [BM08] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph theory*. Springer, 2008 (citado na pg. 17).
- [Bor90] O. V. BORODIN. “Generalization of a theorem of Kotzig and a prescribed coloring of the edges of planar graphs”. Em: *Mat. Zametki* 48 (6 1990), pgs. 22–28. URL: <http://mi.mathnet.ru/eng/mz3404> (citado nas pgs. 22, 24).
- [Cal01] Andreea CALUDE. “The Journey of the Four Colour Theorem Through Time”. Em: *The NZ Math.Magazine* 38 (jan. de 2001). URL: <http://www.math.auckland.ac.nz/Research/Reports/view.php?id=466> (citado na pg. 25).
- [Cas01] J. L. CASTI. *Mathematical mountaintops: the five most famous problems of all time*. Oxford University Press, 2001 (citado na pg. 25).
- [CJW13] Daniel W. CRANSTON, Sogol JAHANBEKAM e Douglas B. WEST. *1,2,3-Conjecture and 1,2-Conjecture for Sparse Graphs*. 2013. arXiv: 1303.3198 [math.CO] (citado na pg. 8).
- [CKY10] Daniel CRANSTON, Seog-Jin KIM e Gexin YU. “Injective Colorings of Graphs with Low Average Degree”. Em: *Algorithmica* 58 (jun. de 2010), pgs. 553–568. DOI: 10.1007/s00453-010-9425-x (citado na pg. 10).
- [CŠ13] Daniel W. CRANSTON e Riste ŠKREKOVSKI. *Sufficient sparseness conditions for G^2 to be $(\Delta + 1)$ -choosable, when $\Delta \geq 5$* . 2013. arXiv: 1303.5136 [math.CO] (citado na pg. 15).
- [CW17] Daniel W. CRANSTON e Douglas B. WEST. “An introduction to the discharging method via graph coloring”. Em: *Discrete Mathematics* 340.4 (2017), pgs. 766–793. DOI: 10.1016/j.disc.2016.11.022 (citado nas pgs. 8, 9, 13).

- [CY10] Daniel CRANSTON e Gexin YU. “A New Lower Bound on the Density of Vertex Identifying Codes for the Infinite Hexagonal Grid”. Em: *Computing Research Repository - CORR* 16 (jun. de 2010). DOI: [10.37236/202](https://doi.org/10.37236/202) (citado nas pgs. 31, 32).
- [Dan19] Rennan Ferreira DANTAS. “Densidade mínima de códigos de identificação em grades”. Doutorado em Ciência da Computação. Universidade Federal do Ceará, 2019 (citado na pg. 29).
- [DHS17] Rennan DANTAS, Frédéric HAVET e Rudini M. SAMPAIO. “Identifying codes for infinite triangular grids with a finite number of rows”. Em: *Discrete Mathematics* 340.7 (2017), pgs. 1584–1597. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.02.015>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X17300626> (citado na pg. 31).
- [ERT80] P. ERDŐS, A. L. RUBIN e H. TAYLOR. “Choosability in graphs”. Em: *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1979)*. Congress. Numer., XXVI. Winnipeg, Man.: Utilitas Math., 1980, pgs. 125–157 (citado na pg. 13).
- [Hli] Petr HLINĚNÝ. *Discharging Technique in Practice*. URL: <https://kam.mff.cuni.cz/~spring/2000/texts/hlineny.ps> (citado na pg. 21).
- [Sta11] Brendon STANTON. *On Vertex Identifying Codes For Infinite Lattices*. 2011. arXiv: [1102.2643](https://arxiv.org/abs/1102.2643) [math.CO] (citado na pg. 28).
- [Tho] Robin K. THOMAS. URL: <http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html> (citado na pg. 26).
- [Tho98] Robin K. THOMAS. “An Update On The Four-Color Theorem”. Em: *Notices of the American Mathematical Society* 45 (1998), pgs. 848–859 (citado na pg. 25).
- [Wes01] D. B. WEST. *Introduction to graph theory*. Prentice Hall, 2001 (citado na pg. 21).