Sistemas de equações não-lineares e problemas de empacotamento

Jan Marcel Paiva Gentil
Orientador: Ernesto G. Birgin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Fomento: FAPESP (proc. 06/57633-1)

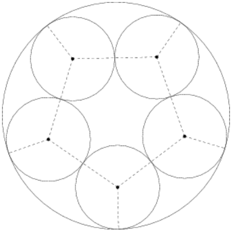
MAC0499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

Organização

Introdução ao tema

Problemas de empacotamento

Dispôr um conjunto de itens dentro de um objeto de modo que eles não se sobreponham ou violem as bordas do objeto.



Variante estudada

Formulação

Minimizar as dimensões de um objeto (circular, quadrado, retangular, etc.) que comporte em seu interior um dado número de itens circulares idênticos de raio unitário.

Minimizar	as dimensões do objeto
sujeito a	conter os itens sem sobreposições

Nota

A título de ilustração, nesta apresentação será exemplificado apenas o caso de empacotamento em círculos.

Variante estudada

Formulação

Minimizar as dimensões de um objeto (circular, quadrado, retangular, etc.) que comporte em seu interior um dado número de itens circulares idênticos de raio unitário.

Minimizar	as dimensões do objeto
sujeito a	conter os itens sem sobreposições

Nota

A título de ilustração, nesta apresentação será exemplificado apenas o caso de empacotamento em círculos.

Motivação do trabalho

Estratégias existentes

Constituem métodos iterativos, de convergência linear, que geram uma seqüência infinita de pontos, a cujo conjunto de pontos de acumulação, no melhor dos casos, pertence a solução buscada.

Nosso objetivo

Desenvolver um método de convergência quadrática que aprimore a acurácia dos resultados obtidos por tais métodos, provendo ainda respostas precisas para casos não reportados na literatura.

Motivação do trabalho

Estratégias existentes

Constituem métodos iterativos, de convergência linear, que geram uma seqüência infinita de pontos, a cujo conjunto de pontos de acumulação, no melhor dos casos, pertence a solução buscada.

Nosso objetivo

Desenvolver um método de convergência quadrática que aprimore a acurácia dos resultados obtidos por tais métodos, provendo ainda respostas precisas para casos não reportados na literatura.

Restrições do PNL

Não-sobreposição

$$d(c_i, c_j) \geq 2r \quad \forall\, i < j$$

Não-violação

$$d(c_i, C) + r \leq R \quad \forall\, i = 1, \ldots, N$$

sendo
- R o raio do objeto
- r o raio dos itens
- C o centro do objeto
- c_i o centro do item i
- N o número de itens
- d a distância euclidiana

Idéia central

Fato

Em uma configuração ótima, muitos dos itens empacotados fazem contato entre si ou com as bordas do objeto, satisfazendo com igualdade muitas das restrições.

Idéia

Se conhecidas de antemão essas que acabariam por se tornar ativas, é então possível escrever um sistema de equações não-lineares cuja solução constitui uma resposta para o problema de empacotamento estudado.

Idéia central

Fato

Em uma configuração ótima, muitos dos itens empacotados fazem contato entre si ou com as bordas do objeto, satisfazendo com igualdade muitas das restrições.

Idéia

Se conhecidas de antemão essas que acabariam por se tornar ativas, é então possível escrever um sistema de equações não-lineares cuja solução constitui uma resposta para o problema de empacotamento estudado.

Formulação do problema

Encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça:

$$F(x^*) = 0, \; F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

sendo F formada pelas restrições satisfeitas com igualdade.

Observação

O número m de restrições ativas na solução (i.e. total de contatos) pertence a $O(N)$, enquanto o número total de restrições do modelo de PNL é da ordem de $O(N^2)$.

Formulação do problema

Encontrar $x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça:

$$F(x^*) = 0, \; F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

sendo F formada pelas restrições satisfeitas com igualdade.

Observação

O número m de restrições ativas na solução (i.e. total de contatos) pertence a $O(N)$, enquanto o número total de restrições do modelo de PNL é da ordem de $O(N^2)$.

Detecção de contatos

Os itens *i* e *j* fazem contato entre si se:

$$d(c_i, c_j) \quad = \quad 2r$$

e o item *i* faz contato com as bordas do objeto se:

$$d(c_i, C) + r \quad = \quad R$$

Detecção de contatos

Os itens *i* e *j* fazem contato entre si se:

$$d(c_i, c_j) - 2r \quad = \quad 0$$

e o item *i* faz contato com as bordas do objeto se:

$$R - (d(c_i, C) + r) \quad = \quad 0$$

Detecção de contatos

Os itens *i* e *j* fazem contato entre si se:

$$d(c_i, c_j) - 2r \quad \leq \quad \varepsilon_1$$

e o item *i* faz contato com as bordas do objeto se:

$$R - (d(c_i, C) + r) \quad \leq \quad \varepsilon_2$$

sendo ε_1 e ε_2 definidos empiricamente.

Construção de F

O sistema é formado por dois tipos de equação:

$$f_\alpha(\cdot) \triangleq d(c_i, c_j)^2 - (2r)^2$$

para cada restrição de sobreposição ativa α e

$$f_\beta(\cdot) \triangleq (R - r)^2 - d(c_i, C)^2$$

para cada restrição de violação ativa β.

Método de Newton-Raphson

Sendo F continuamente diferenciável, sua raiz pode ser sucessivamente aproximada pelo zero de sua melhor aproximação linear local:

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= 0 \\ F(x_k) + J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= 0 \\ J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -F(x_k) \\ & \quad J_F(x_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

- Recai-se em um sistema linear sobredeterminado da forma $Ax = b$ para a incógnita $x_{k+1} - x_k$.
- A seqüência $\{x_k\}$ gerada converge quadraticamente à raiz de F, supondo x_0 suficientemente próximo.

Método de Newton-Raphson

Sendo F continuamente diferenciável, sua raiz pode ser sucessivamente aproximada pelo zero de sua melhor aproximação linear local:

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= 0 \\ F(x_k) + J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= 0 \\ J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -F(x_k) \\ & \quad J_F(x_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

- Recai-se em um sistema linear sobredeterminado da forma $Ax = b$ para a incógnita $x_{k+1} - x_k$.
- A seqüência $\{x_k\}$ gerada converge quadraticamente à raiz de F, supondo x_0 suficientemente próximo.

Método de Newton-Raphson

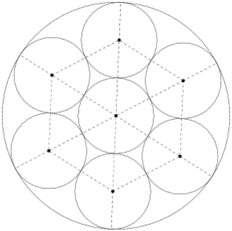
Sendo F continuamente diferenciável, sua raiz pode ser sucessivamente aproximada pelo zero de sua melhor aproximação linear local:

$$\begin{aligned} F(x_{k+1}) &= 0 \\ F(x_k) + J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= 0 \\ J_F(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -F(x_k) \\ & \quad J_F(x_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

- Recai-se em um sistema linear sobredeterminado da forma $Ax = b$ para a incógnita $x_{k+1} - x_k$.
- A seqüência $\{x_k\}$ gerada converge quadraticamente à raiz de F, supondo x_0 suficientemente próximo.

Resolução do sistema

O sistema obtido, apesar de sobredeterminado, não deixa de ser compatível, pois algumas das equações que o compõem são redudantes.

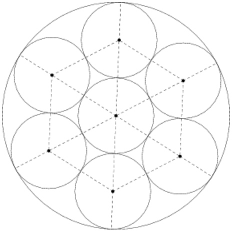


São duas as principais formas de computar essa solução:

- Decomposição QR aplicada a $J_F(x_k)$;
- Decomposição de Cholesky aplicada à equação normal.

Resolução do sistema

O sistema obtido, apesar de sobredeterminado, não deixa de ser compatível, pois algumas das equações que o compõem são redudantes.



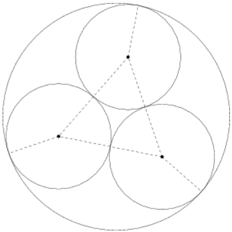
São duas as principais formas de computar essa solução:

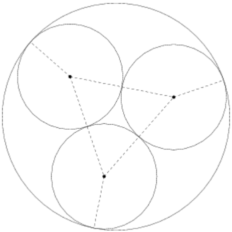
- Decomposição QR aplicada a $J_F(x_k)$;
- Decomposição de Cholesky aplicada à equação normal.

Outros desafios

Perda de convergência

Múltiplas soluções ótimas arbitrariamente próximas devem ser evitadas fixando-se parcialmente um item.

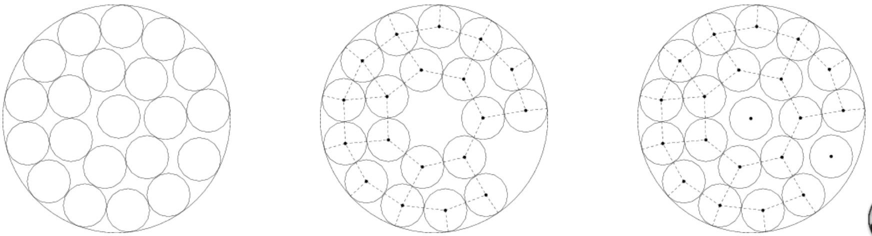




Outros desafios

Indeterminação do sistema

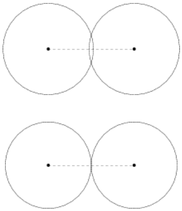
Itens “soltos” precisam ser ignorados durante a execução do método e, apenas ao final, incorporados à solução por meio da resolução de um novo subproblema de otimização com ALGENCAN.



Outros desafios

Violações remanescentes

Podem ser facilmente corrigidas com o afastamento de itens que se sobreponham e a posterior ampliação das dimensões do objeto.



Para objetos circulares

- Testes com diferentes formas de objeto e *N* variando de 1 a 50 itens;
- Base de dados: `http://www.packomania.com`;
- Para as instâncias já testadas, precisão de 10^{-16} em 88% delas;
- Soluções viáveis e razoavelmente precisas (10^{-6}) em 100% dos casos.