

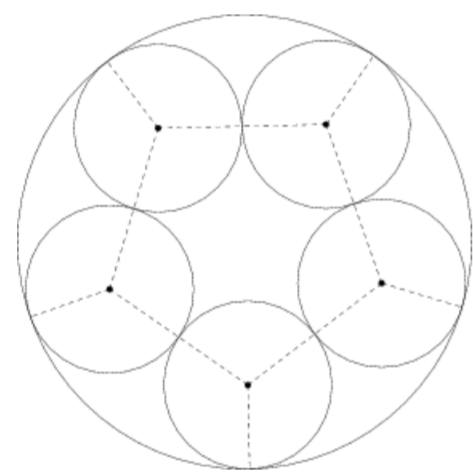
Sistemas de equações não-lineares e problemas de empacotamento

Jan Marcel Paiva Gentil (jgmarcel@ime.usp.br)
Orientador: Ernesto G. Birgin (egbirgin@ime.usp.br)

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Fomento: FAPESP (proc. 06/57633-1)

O Problema

Problemas de empacotamento consistem em dispôr um conjunto de itens dentro de um objeto de modo que eles não se sobreponham ou violem as bordas do objeto.



Configuração ótima para 5 itens em um círculo

Variante estudada: minimizar as dimensões de um objeto que comporte em seu interior um dado número de itens circulares idênticos de raio unitário.

Modelo de PNL para N itens em um objeto circular:

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & R \\ \text{s. a} & d(c_i, c_j) \geq r_i + r_j, \forall i, j = 1, \dots, N, i \neq j \quad (1) \\ & (c_i^x)^2 + (c_i^y)^2 \leq (R - r_i)^2, \forall i = 1, \dots, N \quad (2) \end{array}$$

A Motivação

Estratégias existentes:

- métodos iterativos, seqüência infinita;
- convergência a minimizadores locais;
- taxa de convergência apenas linear.

Objetivos deste trabalho:

- taxa de convergência quadrática;
- melhor acurácia que resultados anteriores;
- novas soluções precisas antes desconhecidas.

Idéia central

É fato que, em uma configuração ótima, muitos dos itens empacotados fazem contato entre si ou com as bordas do objeto, satisfazendo com igualdade muitas das restrições do PNL (inequações (1) e (2)).

Assim, se conhecidas de antemão essas que acabariam por se tornar ativas, é então possível escrever um sistema de equações não-lineares cuja solução constitui uma resposta para o problema de empacotamento estudado.

Isso pode ser conseguido por meio da análise das soluções dadas por modelos de programação não-linear já desenvolvidos, em especial pelos propostos em [3].

Implementação

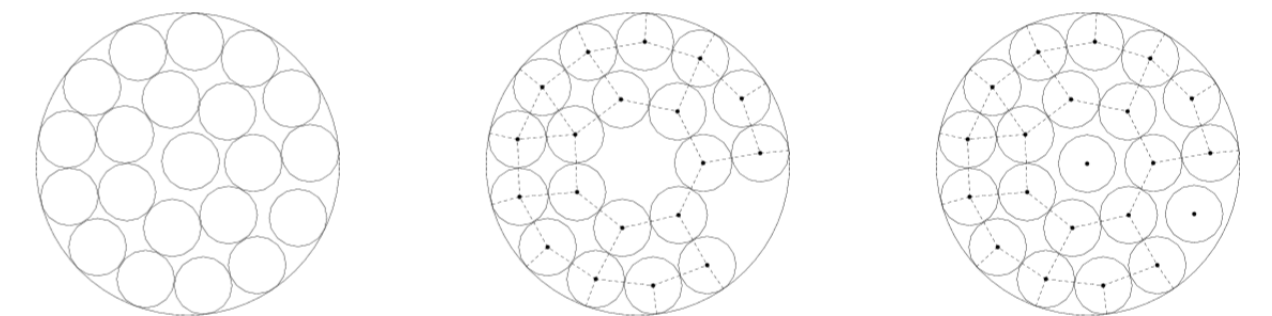
Os modelos de PNL são tratados pelo método ALGENCAN, um moderno algoritmo de Lagrangeanos Aumentados para minimização suave e restrita [1]. Os sistemas não-lineares resultantes serão resolvidos pelo método de Newton, a fim de conferir a essa etapa convergência quadrática [4].

A estrutura do algoritmo produzido é a seguinte:

- 1) Entrada
 - 1.1) N, r := número e raio dos itens no empacotamento
- 2) Laço principal
 - 2.1) Execute ALGENCAN e obtenha uma solução viável x_k
 - 2.2) Detecte os contatos estabelecidos na solução
 - 2.3) Formule o sistema de equações não-lineares
 - 2.4) Calcule a raiz do sistema pelo método de Newton
 - 2.5) Compare à melhor solução e atualize-a se necessário
- 3) Saída
 - 3.1) x^* := melhor solução encontrada

Outros desafios

Itens que participam de menos de dois contatos contribuem com a adição de mais variáveis (2) que equações ao sistema, que poderia vir a se tornar indeterminado. Tais itens precisam ser ignorados durante a execução do método e, apenas ao final, incorporados à solução por meio da resolução de um novo subproblema de otimização com ALGENCAN.



Exemplo de configuração antes, durante e após tal tratamento

Resultados

- Testes executados com diferentes formas de objeto e N variando de 1 a 50 itens;
- Soluções viáveis e razoavelmente precisas têm sido encontradas em 100% dos casos;
- Optimalidade é determinada comparando-se às divulgadas na base de dados Packomania [2];
- As melhores soluções conhecidas foram alcançadas pelo método em 88% das instâncias já testadas.

[1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt, *Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification*, Mathematical Programming **111** (2008), 5–32.
[2] E. Specht, *Packomania*, disponível em <http://www.packomania.com>.
[3] E. G. Birgin e F. N. C. Sobral, *Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems*, Computers & Operations Research (2006), por aparecer, disponível em <http://www.ime.usp.br/~egbirgin>.
[4] J. E. Dennis Jr. e R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Classics in Applied Mathematics, SIAM Publications, Philadelphia, 1996.