Sistemas de equações não-lineares e problemas de empacotamento

Aluno: Jan Marcel Paiva Gentil
Orientador: Ernesto G. Birgin

Resumo

A classe de problemas em estudo é a de empacotamento de itens circulares, que consiste em encontrar uma disposição de um número fixo deles que minimize as dimensões do objeto que os contém. Serão considerados objetos circulares, quadrados e triangulares, além de versões tridimensionais de empacotamento. O objetivo do projeto é, a partir de resultados obtidos por métodos de Otimização Contínua empregados em trabalhos anteriores, encontrar soluções mais precisas para tais problemas. Para isso, é proposta uma estratégia baseada na formulação de sistemas de equações não-lineares e a sua solução a partir do método de Newton-Raphson.

Palavras-chave: Empacotamento, sistemas de equações não-lineares, programação não-linear.

1 Introdução

Problemas de empacotamento ocorrem naturalmente em diversas situações da vida cotidiana, da disposição de produtos em uma embalagem ao carregamento de caixas em um caminhão. Por esse motivo, algoritmos capazes de resolvê-los eficientemente há muito despertam grande interesse não só matemático, mas também econômico.

Já foi provado, porém, que a busca por uma solução ótima global para um empacotamento é um problema NP-completo, o que a torna muito custosa em termos de tempo de processamento. Sendo assim, comumente são empregados métodos heurísticos, que apesar de serem, em sua maioria, razoavelmente rápidos, não garantem convergir a minimizadores globais. Dentre eles, interessam a este trabalho os que utilizam modelos não-lineares do problema, que podem ser então resolvidos por algoritmos de programação não-linear.

Todas as estratégias baseadas em modelos não-lineares já conhecidas têm um ponto em comum: constituem métodos iterativos, de convergência *linear*, que geram uma seqüência *infinita* de pontos, a cujo conjunto de pontos de acumulação, no melhor dos casos, pertence a solução buscada. Assim, na prática, faz-se necessária a utilização de um critério de parada capaz de medir a proximididade à resposta desejada. Mais ainda, os algoritmos empregados garantem convergir a minimizadores locais, mas não a minimizadores globais.

2 Resumo da monografia a ser desenvolvida

Neste trabalho, a variante estudada dentre todas as apresentadas para problemas de empacotamento será a que busca minimizar as dimensões de um objeto que comporte em seu interior um dado número de itens circulares idênticos, sem que haja sobreposições. Dessa formulação obtém-se naturalmente o seguinte modelo não-linear:

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & \text{as dimensões do objeto} \\ \text{sujeito a} & \text{comportar os itens sem sobreposições} \end{array}$$

Parte das restrições associadas a essa modelagem cuidam da não-violação dos limites do objeto e, portanto, dependem diretamente da sua forma. Para a circular, por exemplo, é deduzido o seguinte conjunto de desigualdades:

$$\begin{array}{rcl} d(C, c_i) + r & \leq & R \qquad (1) \\ & & \forall \quad i = 1, \ldots, N \\ \text{sendo:} & R & \text{o raio do objeto} \\ & r & \text{o raio dos itens} \\ & C & \text{o centro do objeto} \\ & c_i & \text{o centro do item } i \\ & N & \text{o número de itens} \\ & d & \text{a distância euclidiana} \end{array}$$

O restante das restrições concernem a proibição de sobreposições entre os itens considerados e, por serem esses definidos como circulares ao longo de todo o estudo a ser desenvolvido, serão sempre escritas como:

$$\begin{array}{rcl} d(c_i, c_j) & \geq & 2r \qquad (2) \\ & & \forall \quad i < j \end{array}$$

Não é difícil compreender que, em uma configuração ótima, muitos dos itens envolvidos são postos em contato entre si ou com as bordas do objeto, o que torna ativas muitas dessas restrições. Assim, se conhecidas de antemão essas que acabariam por ser satisfeitas com igualdade, é então possível escrever um sistema de equações não-lineares cuja solução constitui uma resposta para o problema de empacotamento estudado. Dessa forma, pode-se obter uma solução de precisão ainda maior que a da fornecida pelos métodos de otimização.

Cabe ainda destacar que o número de restrições ativas na solução (que nada mais é que o número de contatos entre os itens somado ao número de itens que tocam as bordas do objeto) pertence a $\mathcal{O}(N)$, enquanto o número total de restrições do modelo de programação não-linear é $N(N-1)/2+N$.

Alguns desafios podem surgir na detecção das restrições ativas na solução. É sabido, por exemplo, que há instâncias do problema cuja solução ótima apresenta itens que "flutuam" (Figura 1). Nesse caso, fica claro que a resolução do sistema de equações não-lineares relativo às restrições ativas *não* fornecerá uma solução apropriada, gerando um cenário que deverá ser tratado especialmente pelo método que se pretende desenvolver nesse projeto.

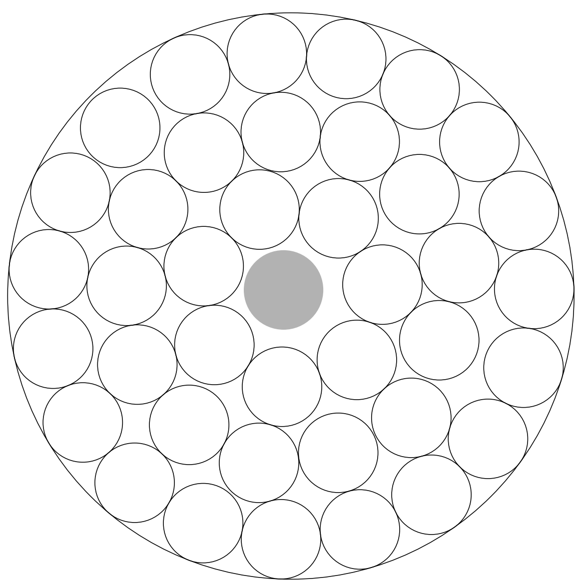

Figura 1: item com liberdade de movimento no objeto

Uma vez construído corretamente o sistema de equações não-lineares, prossegue-se à sua resolução, o que será feito pelo método de Newton [22].

Um inconveniente que pode se impôr à resolução do sistema não-linear é a existência de não apenas uma, mas sim de uma "vizinhança" de soluções ótimas. É fácil ver que, mesmo não havendo itens flutuantes, é possível, a partir de uma configuração ótima, obter-se outra distinta apenas pela rotação de todo o conjunto no interior do objeto (Figura 2). Essa questão pode atrapalhar a execução do algoritmo e também está sendo considerada durante sua elaboração.

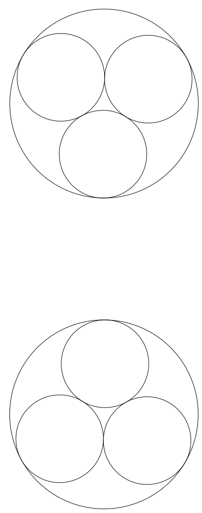

Figura 2: duas configurações ótimas distintas para 3 itens

3 Objetivos

Com a implementação das idéias aqui descritas em uma rotina computacional capaz de operar sobre dados fornecidos por técnicas de programação não-linear já disponíveis, espera-se obter para os problemas de empacotamento abordados respostas de grande acurácia e com significativa redução nos custos de processamento. Mais precisamente, planeja-se trabalhar sobre as soluções dadas pelo método apresentado em [21] para os casos de empacotamento em círculos, quadrados e triângulos (esse último para até 15 itens), que se aproximam das soluções ótimas publicadas em [18] com precisão de 10^{-6}, aquém do desejado pelos autores do trabalho. O objetivo será o de, a partir delas, não só igualar os melhores resultados conhecidos atualmente, bem como concluir novos para os casos ainda não divulgados na literatura.

4 Atividades já realizadas

O trabalho foi iniciado pelo estudo da bibliografia básica de empacotamento e dos trabalhos [21] e [17], acompanhado pelo entendimento e análise das técnicas clássicas de resolução de sistemas não-lineares (principalmente [22]).

Foi implementado então o algoritmo proposto, restrito por enquanto apenas ao caso de objetos circulares. O programa resultante foi daí submetido a testes numéricos, cujos resultados têm se mostrado bastante promissores.

5 Cronograma de atividades

- **Julho:** estudo e aplicação de técnicas de aprimoramento do algoritmo desenvolvido, de forma a obterem-se respostas mais precisas.
- **Agosto a novembro:** extensão do método a outros tipos de objetos (quadrados, retângulos, *strips* e triângulos) e, se o tempo permitir, a formulações tridimensionais do problema.
- **Novembro:** redação da monografia, confecção do pôster e preparação da apresentação do trabalho.

6 Estrutura esperada da monografia

A monografia produzida como parte das atividades da disciplina consistirá em duas partes, sendo a primeira técnica e a segunda de cunho mais subjetivo. A estrutura planejada para ambas é a seguinte:

- **Parte técnica**
  - **Introdução:**
    - Abordagens prévias
    - Motivação e objetivos
  - **Metodologia:**
    - Modelo não-linear
    - Abordagem proposta
    - Detecção das restrições ativas
    - Formulação do sistema
    - Resolução do sistema
    - Obstáculos encontrados

- **Conclusão:**
    * Resultados obtidos
    * Trabalhos futuros (se houver)
- **Bibliografia**

• **Parte subjetiva**

- **Desafios e frustrações**
- **Disciplinas mais relevantes**
- **Aplicação dos conceitos estudados**
- **Passos futuros de aperfeiçoamento na área**
- **Conclusão**

Referências

[1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt. "Augmented Lagrangian methods under the Constant Positive Linear Dependence constraint qualification". *Mathematical Programming*, 2006. (DOI: 10.1007/s10107-006-0077-1)

[2] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez e M. L. Schuverdt. "On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints". *SIAM Journal on Optimization*, por aparecer. (Disponível em `http://www.ime.usp.br/~egbirgin`.)

[3] E. G. Birgin e J. M. Martínez. "TANGO Project". `http://www.ime.usp.br/~egbirgin/tango`.

[4] E. G. Birgin, R. Castillo e J. M. Martínez. "Numerical comparison of Augmented Lagrangian algorithms for nonconvex problems". *Computational Optimization and Applications*, 31:31–56, 2005.

[5] E. G. Birgin e J. M. Martínez. "Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for Augmented Lagrangian Optimization". *Computational Optimization and Applications*, por aparecer. (Disponível em `http://www.ime.usp.br/~egbirgin`.)

[6] E. G. Birgin, J. M. Martínez, W. F. Mascarenhas e D. P. Ronconi. "Method of Sentinels for Packing Items whitin Arbitrary Convex Regions". *Journal of the Operational Research Society*, 57:735–746, 2006.

[7] E. G. Birgin, J. M. Martínez, F. H. Nishihara e D. P. Ronconi. "Orthogonal packing of rectangular items within arbitrary convex regions by nonlinear optimization". *Computers & Operations Research*, 33:3535–3548, 2006.

[8] E. G. Birgin, J. M. Martínez e D. P. Ronconi, "Optimizing the Packing of Cylinders into a Rectangular Container: A Nonlinear Approach". *European Journal of Operational Research*, 160:19–33, 2005.

[9] A. Brooke, D. Kendrick e A. Meeraus. "GAMS Release 2.25: A User's Guide". *The Scientific Press*, Redwood City, CA, 1992.

[10] M. Goldberg. "The packing of equal circles in a square". *Mathematics Magazine*, 43:24–30, 1970.

[11] C. de Groot, R. Peikert e D. Würtz. "The optimal packing of ten equal circles in a square". *IPS Research Report 90-12*, ETH, Zürich, 1990.

[12] M. Locatelli e U. Raber. "Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach". *Discrete Applied Mathematics*, 122:139–166, 2002.

[13] C. D. Maranas, C. A. Floudas e P. M. Pardalos. "New results in the packing of equal circles in a square". *Discrete Mathematics*, 142:287–293, 1995.

[14] W. F. Mascarenhas e E. G. Birgin, "Using sentinels to detect intersections". Submetido. (Disponível em `http://www.ime.usp.br/~egbirgin`.)

[15] N. Mladenovic, F. Plastria e D. Urosevic. "Reformulation descent applied to circle packing problems". *Computers & Operations Research*, 32:2419–2434, 2005.

[16] B. A. Murtagh e M. A. Saunders. "MINOS 5.5 User's Guide". *Systems Optimization Laboratory Report SOL 83-20R*, Stanford University, 1998.

[17] K. J. Nurmela e P. R. Östergård. "Packing up to 50 equal circles in a square". *Discrete & Computational Geometry*, 18:111–120, 1997.

[18] E. Specht. "Packomania". `http://www.packomania.com`.

[19] Yu. G. Stoyan e G. N. Yas'kov. "*Mathematical model and solution method of optimization problem of placement of rectangles and circles taking into account special constraints*". International Transactions in Operational Research, 5:45–57, 1998.

[20] Yu. G. Stoyan e G. N. Yas'kov. "A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip". *European Journal of Operational Research*, 156:590–600, 2004.

[21] E. G. Birgin e F. N. C. Sobral. "Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems". *Computers & Operations Research*, 2006. (DOI: 10.1016/j.cor.2006.11.002)

[22] J. E. Dennis Jr. e R. B. Schnabel. "Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations". *SIAM Publications*, Classics in Applied Mathematics, Philadelphia, 1996.

[23] G. H. Golub, C. F. Van Loan. "Matrix Computations". *The Johns Hopkins University Press*, Baltimore, 1996.