$\mathcal{Q}$-**Sets**, Espaços Métricos e Completude

José G. Alvim
(joint work w. Caio de A. Mendes Hugo L. Mariano)

IME–USP

2024

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Introdução

Objetivo:

Expor as ideias de Singletons e Completude de Scott via intuições sobre espaços métricos.

Introdução

Objetivo:

Expor as ideias de Singletons e Completude de Scott via intuições sobre espaços métricos.

1. Espaços Métricos e Completude de Cauchy;
2. Sequências de Cauchy como pontos ideais;
3. Pontos ideais como distribuições métricas;
4. Generalizar para $\mathcal{Q}$-sets;
5. A noção de Singletons.

Sequências

Uma sequência Moore–Smith é dada por um conjunto dirigido $(I, \leq)$ de índices e a rede (net) "de fato" $(x_i \mid i \in I)$ em (X, d).

Uma sequência pode convergir para um determinado ponto ou não, e em espaços topológicos gerais, este ponto não precisa ser único. Como estamos olhando espaços métricos generalizados $d(x, y) = 0$ pode ocorrer mesmo que $x \neq y$.

Sequências de Cauchy

A métrica d estende-se para sequências de Cauchy:

$$d(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y_m)$$

Sequências de Cauchy

A métrica d estende-se para sequências de Cauchy:

$$d(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y_m)$$

1. Sequências de Cauchy representam pontos possivelmente ausentes do espaço em si;

Sequências de Cauchy

A métrica d estende-se para sequências de Cauchy:

$$d(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y_m)$$

1. Sequências de Cauchy representam pontos possivelmente ausentes do espaço em si;
2. Formam um espaço;

Sequências de Cauchy

A métrica d estende-se para sequências de Cauchy:

$$d(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y_m)$$

1. Sequências de Cauchy representam pontos possivelmente ausentes do espaço em si;
2. Formam um espaço;
3. Muita duplicação, muitos representantes do mesmo ponto ideal;

Sequências de Cauchy

A métrica d estende-se para sequências de Cauchy:

$$d(x_\bullet, y_\bullet) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y_m)$$

1. Sequências de Cauchy representam pontos possivelmente ausentes do espaço em si;
2. Formam um espaço;
3. Muita duplicação, muitos representantes do mesmo ponto ideal;
4. A forma com a qual isso é feito é tal que a distância tem uma extensão natural para as sequências, imersão/completamento

Representando Pontos “Funcionalmente”

Existe uma forma “funcional” de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Representando Pontos "Funcionalmente"

Existe uma forma "funcional" de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;

Representando Pontos "Funcionalmente"

Existe uma forma "funcional" de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;

Representando Pontos "Funcionalmente"

Existe uma forma "funcional" de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;
3. $\sigma(y) + \sigma(z) \geq d(y, z)$;

Representando Pontos “Funcionalmente”

Existe uma forma “funcional” de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;
3. $\sigma(y) + \sigma(z) \geq d(y, z)$;
4. $\sigma(y) + \inf \operatorname{img} \sigma = \sigma(y)$;

Representando Pontos “Funcionalmente”

Existe uma forma “funcional” de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;
3. $\sigma(y) + \sigma(z) \geq d(y, z)$;
4. $\sigma(y) + \inf \operatorname{img} \sigma = \sigma(y)$; (but why?)

Representando Pontos "Funcionalmente"

Existe uma forma "funcional" de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;
3. $\sigma(y) + \sigma(z) \geq d(y, z)$;
4. $\sigma(y) + \inf \operatorname{img} \sigma = \sigma(y)$; (but why?)

Tudo em decorrência da definição de d, Cauchy, nada especial.

Representando Pontos “Funcionalmente”

Existe uma forma “funcional” de codificar convergência:

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = \inf_n \sup_{m \geq n} d(x_m, y) = d(x_\bullet, y)$$

$$\sigma_{x_\bullet}(y) = 0 \iff \lim_n x_n = y$$

Em geral,

1. $\sigma(z) + d(z, y) \geq \sigma(y)$;
2. $\sigma(y) + d(y, y) = \sigma(y)$;
3. $\sigma(y) + \sigma(z) \geq d(y, z)$;
4. $\sigma(y) + \inf \operatorname{img} \sigma = \sigma(y)$; (but why?)

Tudo em decorrência da definição de d, Cauchy, nada especial.

(Via de regra $d(y, \_)$ satisfaz estas regras em todo espaço)

Representação

Uma distribuição métrica destas σ é dita "representada por x" quando $\sigma(y) = d(x, y)$.

Um σ que veio de uma sequência de Cauchy é representado por um ponto se e só se a sequência converge para ele.

Representação

Uma distribuição métrica destas σ é dita "representada por x" quando $\sigma(y) = d(x, y)$.

Um σ que veio de uma sequência de Cauchy é representado por um ponto se e só se a sequência converge para ele.
Note que isso é equivalente à sequência constante y estar na classe da sequência $x_\bullet$.

Versão $\mathcal{Q}$-sets

Nossos Quantales

Consideramos quantales comutativos fortemente integrais com recobrimentos próprios: $(Q, \otimes, \leq)$

1. $\leq$ é uma ordem parcial completa;
2. $(Q, \otimes, \top)$ é um monoide comutativo;
3. $e = e \otimes e \implies e \leq \bigvee_i a_i \implies e \leq \bigvee_i a_i \otimes a_i$;
4. $\otimes$ distribui sobre $\bigvee$;
5. $\exists P \subseteq Q \setminus \{\top\} : \bigvee P = \top$.

Nossos Quantales

Consideramos quantales comutativos fortemente integrais com recobrimentos próprios: $(Q, \otimes, \leq)$

1. $\leq$ é uma ordem parcial completa;
2. $(Q, \otimes, \top)$ é um monoide comutativo;
3. $e = e \otimes e \implies e \leq \bigvee_i a_i \implies e \leq \bigvee_i a_i \otimes a_i$;
4. $\otimes$ distribui sobre $\bigvee$;
5. $\exists P \subseteq Q \setminus \{\top\} : \bigvee P = \top$.

Exemplo prototípico:

$$([0, \infty], \leq^{\mathbf{op}}, +) \cong ([0, 1], \leq, \cdot)$$

Nossos Quantales

Consideramos quantales comutativos fortemente integrais com recobrimentos próprios: $(Q, \otimes, \leq)$

1. $\leq$ é uma ordem parcial completa;
2. $(Q, \otimes, \top)$ é um monoide comutativo;
3. $e = e \otimes e \implies e \leq \bigvee_i a_i \implies e \leq \bigvee_i a_i \otimes a_i$;
4. $\otimes$ distribui sobre $\bigvee$;
5. $\exists P \subseteq Q \setminus \{\top\} : \bigvee P = \top$.

Exemplo prototípico:

$$([0, \infty], \leq^{\mathbf{op}}, +) \cong ([0, 1], \leq, \cdot)$$

Note que a ordem inverte, então "sup" $\rightsquigarrow \bigwedge$ e "inf" $\rightsquigarrow \bigvee$, $\top = 0$, $\bot = \infty$.

$\mathcal{Q}$-sets: Um Resumo

Objetos:

$$(X, \delta) \qquad \delta : X \times X \to \mathcal{Q}$$

$\mathcal{Q}$-sets: Um Resumo

Objetos:

$$(X, \delta) \qquad \delta : X \times X \to \mathcal{Q}$$

$$\delta(x, x) \otimes \delta(x, y) = \delta(x, y) = \delta(y, x) = \delta(y, y) \otimes \delta(x, y)$$

$\mathcal{Q}$-sets: Um Resumo

Objetos:

$$(X, \delta) \qquad \delta : X \times X \to \mathcal{Q}$$

$$\delta(x, x) \otimes \delta(x, y) = \delta(x, y) = \delta(y, x) = \delta(y, y) \otimes \delta(x, y)$$

$$\delta(x, y) \otimes \delta(y, z) \leq \delta(x, z)$$

$\mathcal{Q}$-sets: Um Resumo

Objetos:

$$(X, \delta) \qquad \delta : X \times X \to \mathcal{Q}$$

$$\delta(x,x) \otimes \delta(x,y) = \delta(x,y) = \delta(y,x) = \delta(y,y) \otimes \delta(x,y)$$

$$\delta(x,y) \otimes \delta(y,z) \leq \delta(x,z)$$

Notação:

$$\mathrm{E}x := \delta(x,x)$$

$\mathcal{Q}$-sets: Um Resumo

Objetos:

$$(X, \delta) \qquad \delta : X \times X \to \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{E}x \otimes \delta(x, y) = \delta(x, y) = \delta(y, x) = \mathrm{E}y \otimes \delta(x, y)$$

$$\delta(x, y) \otimes \delta(y, z) \leq \delta(x, z)$$

Notação:

$$\mathrm{E}x := \delta(x, x)$$

Morfismos:

$$f : X \to Y \qquad \mathrm{E}x = \mathrm{E}fx \qquad \delta_X(x, x') \leq \delta_Y(fx, fx')$$

Interpretação

Uma relação de equivalência $\sim$ sobre $Y \subset X$ pode ser pensada como

$$\sim : X \times X \to 2$$

$$y \sim y = \top \qquad a \sim b \,\&\, b \sim c \leq a \sim c \qquad a \sim b = b \sim a$$

Uma métrica em um espaço (X, d) pode ser pensada como um $\delta : X \times X \to [0, \infty]$.

Métricas e relações de equivalência são exemplos destas (co-) distâncias quantale-valoradas.

Expandindo para $\mathcal{Q}$-sets

Uma sequência/rede $x_\bullet : I \to (X, \delta)$ é Cauchy quando

$$\bigvee_n \bigwedge_{u,v \geq n} \delta(x_u, x_v) = \top$$

Ela converge para y quando

$$\bigvee_n \bigwedge_{u \geq n} \delta(x_u, y) = \top$$

E $x_\bullet$ determina uma função σ

$$\sigma(y) = \mathrm{E}y \otimes \bigvee_n \bigwedge_{u \geq n} \delta(x_n, y)$$

tal que:

$$\mathrm{E}y \otimes \sigma(y) = \sigma(y) \qquad \sigma(y) \otimes \sigma(z) \leq \delta(y, z)$$

$$\sigma(y) \otimes \delta(y, z) \leq \sigma(z) \qquad \sigma(y) = \sigma(y) \otimes \bigvee_z \sigma(z)$$

Singletons

Um singleton é uma função $\sigma : X \to \mathcal{Q}$ tal que:

$$\mathrm{E}y \otimes \sigma(y) = \sigma(y) \qquad \sigma(y) \otimes \sigma(z) \leq \delta(y, z)$$

$$\sigma(y) \otimes \delta(y, z) \leq \sigma(z) \qquad \sigma(y) = \sigma(y) \otimes \bigvee_z \sigma(z)$$

Representam quanto um ponto se assemelha com um "ponto ideal"
Dizemos que x representa σ quando $\sigma(y) = \delta(x, y)$.
Tem-se que y representa $\sigma_{x_\bullet}$ exatamente quando $x_\bullet \rightsquigarrow y$.

Mais Geralmente

Em geral, faz sentido falar de Singletons em quantales mais gerais. Podemos perguntar: Cada singleton é representado por um e apenas um único ponto?

(Correspondente ao caso de sequências de Cauchy onde toda sequência é representável por uma (única) sequência constante que é a condição de completude)

Esta propriedade chama-se de completude de Scott/Singletons.

Completamento

Em quantales **comutativos fortemente integrais** existe o *completamento* $\mathfrak{s} : X \to \Sigma X$

$$\mathfrak{s}(x) = \delta(x, \_)$$

Consiste do conjunto de singletons sobre X, munidos do δ "natural":

$$\delta(\sigma, \xi) = \bigvee_x \sigma(x) \otimes \xi(x)$$

Este mapa é extremamente importante, e é componente do reflector da subcategoria formada pelos $\mathcal{Q}$-sets Singleton/Scott-Completos $\Sigma\mathcal{Q}$-**Set**

Alguns Resultados (bem) Básicos

- Singletons são preservados por morfismos;
- Representantes (portanto convergência) também;
- Completude te deixa definir pontos no espaço de maneira indireta, em particular...
- $\mathcal{Q}$-sets tem uma noção boa de mapa de restrição, (dado por)

$$\delta(x \restriction e, \_) = e \otimes \delta(x, \_)$$

- [...]

Futuro

No caso de Ω-sets/H-sets, a condição de completude de singletons gera uma subcategoria plena que é um topos de Grothendieck (equivalente a $Sh(H)$).

- O estudo das propriedades internas à categoria dos $\mathcal{Q}$-sets Scott-completos ainda é relativamente nova.
- Buscar "transportar" o isomorfismo com $Sh(H)$ para o caso quantálico.

Referência

- José Goudet Alvim, Caio de Andrade Mendes, Hugo Luiz Mariano, Quantale valued sets: Categorical Constructions and Properties, to appear in Studia Logica.
- José Goudet Alvim, Caio de Andrade Mendes, Hugo Luiz Mariano, Q-Sets and Friends: Regarding Singleton and Gluing Completeness, arxiv preprint 2023, arXiv:2302.03691