

Complexos e Geometria

Transformações e outras técnicas

MARCELO MACHADO LAGE

2023

1 Transformações no Plano Complexo

1.1 Transformações Lineares

Na primeira parte do material, falamos sobre como lidar com semelhança de triângulos em complexos:

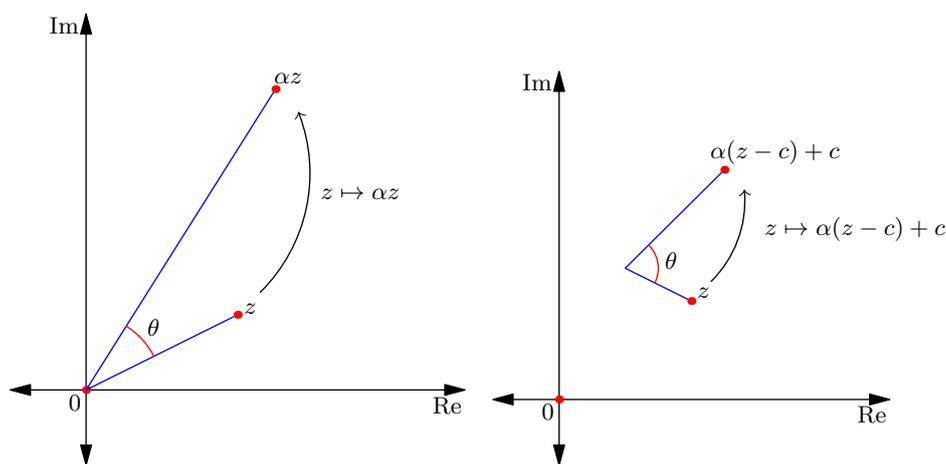
$$\frac{B - O}{A - O} = k \operatorname{cis} \angle AOB$$

, onde $k = \frac{|BO|}{|AO|} \in \mathbb{R}$.

Dde forma, mais geral, podemos visualizar a *multiplicação por um complexo* $z \mapsto \alpha$ como a composição de duas transformações: $z \mapsto |a|z$ (homotetia de centro na origem) e $z \mapsto e^{i \arg a} z$ (rotação de centro na origem), ou seja,

Multiplicar por um complexo é aplicar uma roto-homotetia

Se o centro da roto-homotetia não for a origem, mas um complexo c , fazemos o que fazíamos antes: transladamos a origem para c ($\phi(z) = z - c$), multiplicamos pelo complexo que encapsula a roto-homotetia nesse novo sistema de coordenadas ($\rho(z) = \alpha z$), e depois aplicamos ϕ^{-1} . Na composição, $(\phi^{-1} \circ \rho \circ \phi)(z) = \alpha(z - c) + c$.



Proposição 1 (Miquel complexo). Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. O centro da roto-homotetia que leva o segmento ab no segmento cd é

$$m = \frac{ad - bc}{a + d - b - c}$$

Prova. O centro de roto-homotetia satisfaz a semelhança (direta) $\triangle PAB \sim \triangle PCD$, i.e., $\frac{m-a}{m-b} = \frac{m-c}{m-d}$. A fórmula segue. \square

Lema 2 (Semelhança de triângulos com determinante). Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle XYZ$ são semelhantes de mesma orientação se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se a semelhança for na orientação contrária, deve valer

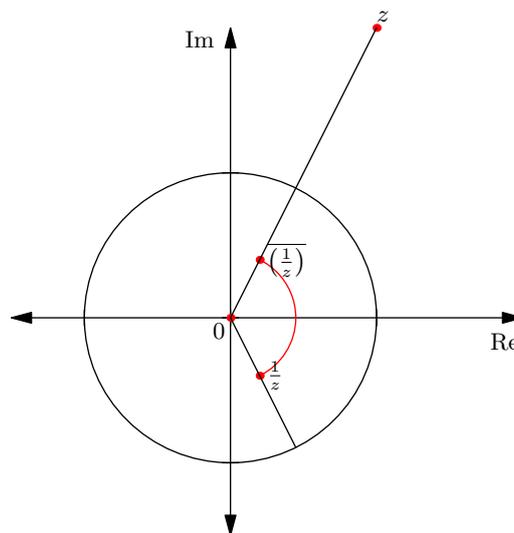
$$\begin{vmatrix} \bar{a} & x & 1 \\ \bar{b} & y & 1 \\ \bar{c} & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por completude, incluímos uma caracterização das transformações lineares no plano complexo:

	Mapa complexo
Translação	$z \mapsto z + c$
Rotação	$z \mapsto az, a = 1$
Homotetia	$z \mapsto kz, k \in \mathbb{R} - \{0\}$
Roto-homotetia	$z \mapsto az + c, a \in \mathbb{C} - \{0\}$

1.2 Inversões

Vamos primeiramente estudar a inversão pelo círculo unitário.



Se $z = re^{i\theta}$, então pela definição de inversão o inverso z' de z pelo círculo de centro na origem e raio 1 é:

$$z = \frac{1^2}{r} e^{i\theta} = \overline{\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

De modo completamente análogo ao que fizemos antes para roto-homotetia, é possível inverter por um círculo genérico de centro c e raio R no plano complexo:

$$z \mapsto \frac{R^2}{\overline{(z - c)}} + c$$

1.3 Transformações de Möbius

Definição 3. Uma Transformação de Möbius é um mapa complexo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é também chamada a *reta projetiva complexa* (reta complexa com um ponto no infinito) ou *esfera de Riemann*.

A vantagem de incluir o ponto no infinito ao domínio da função é que, definindo $\phi(\infty) = \frac{a}{c}$, $\phi(-\frac{d}{c}) = \infty$, o mapa ϕ é de fato uma bijeção na esfera de Riemann. Os próximos resultados permitem uma caracterização mais natural dessas transformações.

Proposição 4 (Transformações de Möbius formam um grupo). Sejam

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \phi'(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

Então $\phi' \circ \phi$ é uma Transformação de Möbius, e

$$\phi^{-1}(z) = \frac{1}{ad - bc} \cdot \frac{dz - b}{-cz + a}$$

é a inversa de ϕ .

Teorema 5. Uma Transformação de Möbius é uma composição de translações ($z \mapsto z + c$), roto-homotetias ($z \mapsto \alpha z$) e inversões seguidas de reflexão (para não alterar a orientação: $z \mapsto \frac{1}{z}$).

Definição 6 (Razão cruzada complexa). A razão cruzada complexa de (z_1, z_2, z_3, z_4) , definida como uma generalização natural da razão cruzada na reta real, é dada por:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Proposição 7. A razão cruzada (z_1, z_2, z_3, z_4) é um número real se, e somente se, os pontos z_1, z_2, z_3, z_4 são colineares ou concíclicos.

Nesse contexto de dualidade reta-círculo, qualquer desses dois objetos pode ser chamado de *cline*.

Teorema 8 (Transformações de Möbius fixam razão cruzada). Seja $\Phi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ uma transformação de Möbius. Então

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\Phi(z_1), \Phi(z_2), \Phi(z_3), \Phi(z_4))$$

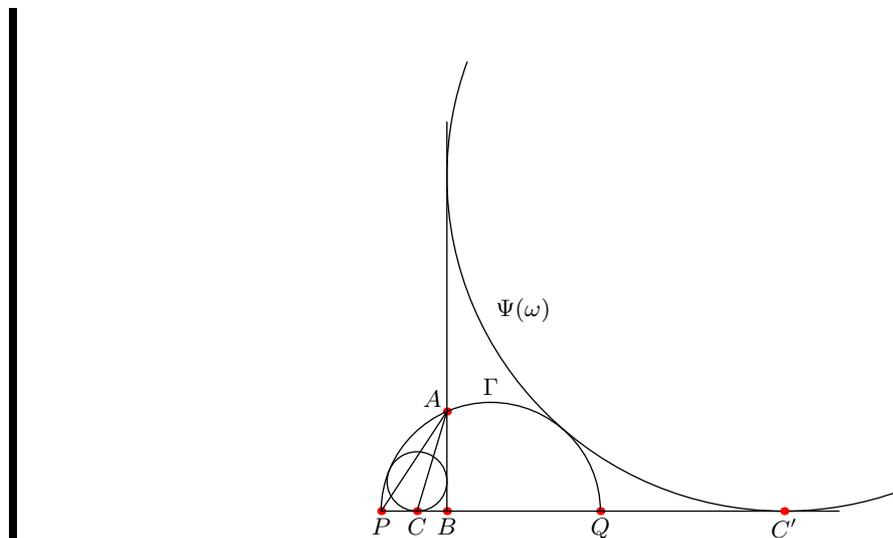
A partir disso, podemos descrever uma Transformação de Möbius a partir das pré-imagens z_2, z_3, z_4 de $1, 0, \infty$:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (\Phi(z), 1, 0, \infty) \iff \Phi(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

Corolário 9. Transformações de Möbius levam clines em clines.

Problema Resolvido 1 (Israel 1995). Seja PQ o diâmetro de um semicírculo Γ . O círculo ω é tangente internamente a Γ e tangente ao segmento PQ em C . Seja A um ponto sobre Γ , e B um ponto de PQ tal que AB tangencia ω e é perpendicular a PQ .

Prove que AC é a bissetriz de $\angle PAB$.



Prova. Podemos reescrever o que pede o problema como $\frac{AB}{AP} = \frac{CB}{CP}$, ou ainda, em termos de razão cruzada complexa, $|(a, c, b, p)| = 1$.

Note que a composição de um número par de inversões é uma Transformação de Möbius: uma inversão é a composição de uma Transformação de Möbius e uma conjugação, enquanto a conjugação é involutiva (i.e., $\bar{\bar{z}} = z$). Sendo assim, considere a Transformação de Möbius

$$\Psi = \phi(Q, QA) \circ \phi(P, PA) = \phi_Q \circ \phi_P$$

Temos

$$\Psi(P) = (\phi_Q \circ \phi_P)(P) = \phi_Q(\infty) = Q$$

$$\Psi(A) = (\phi_Q \circ \phi_P)(A) = \phi_Q(A) = A$$

$$\Psi(Q) = (\phi_Q \circ \phi_P)(Q) = \phi_Q(B) = P$$

$$\Psi(B) = (\phi_Q \circ \phi_P)(B) = \phi_Q(Q) = \infty$$

Logo, denotando $c' = \Psi(c)$:

$$|(a, c, b, p)| = 1 \iff |(a, c', \infty, q)| = 1 \iff |(\infty, q, a, c')| = 1 \iff \left| \frac{\infty - a}{\infty - c'} : \frac{q - a}{q - c'} \right| = 1$$

Da convenção do uso do símbolo ∞ , temos $\frac{\infty - a}{\infty - c} = 1$, e portanto reduzimos a provar $QA = QC'$.

Para provar isso, vejamos primeiro que $\Psi(AB) = AB$. É uma reta, pois é uma cline que passa pelo infinito. Além disso, tanto A como a reflexão de A por PQ são fixas por Ψ , e portanto determinam $\Psi(AB)$.

Também é verdade que $\Psi(\Gamma) = \Gamma$, pois três de seus pontos permanecem sobre Γ .

Logo, pela preservação das tangências entre ω e AB, PQ, Γ , $\Psi(\omega)$ é a circunferência externa a Γ tangente a esses três objetos fixados por Ψ . Mas veja também que $\phi_Q(\phi_P(\omega)) = \phi_P(\omega)$, pois ϕ_Q troca Γ e AB , fixando PQ (sem alternar o que é interno e externo a Γ). Logo, $\phi_Q(C') = C'$, de onde decorre que C' está sobre o círculo da inversão de ϕ_Q , como queríamos. □

2 Problemas

Os problemas não estão em ordem de dificuldade.

Problema 1 (OMpD 2022). Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e M, N os pontos médios de AB e CD respectivamente. As diagonais AC e BD se intersectam em L . Suponha que o circuncírculo de LMN , de centro T , intersecta o circuncírculo de $ABCD$ em dois pontos distintos X, Y . Se a reta MN intersecta a reta XY em S e a reta XM intersecta a reta YN em P , prove que PL é perpendicular a ST .

Problema 2 (IMO SL 2018). Sejam O o circuncentro, e Ω o circuncírculo do triângulo acutângulo ABC . Seja P um ponto arbitrário de Ω , diferente de A, B, C , e seu santípodas em Ω . Denote os circuncentros dos triângulos AOP, BOP , e COP por O_A, O_B , e O_C , respectivamente. As retas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C perpendiculares a BC, CA , e AB passam por O_A, O_B , e O_C , respectivamente. Prove que o circuncírculo do triângulo formado por ℓ_A, ℓ_B , e ℓ_C é tangente à reta OP .

Problema 3 (IMO SL 2006). Pontos A_1, B_1, C_1 são escolhidos sobre os lados BC, CA, AB do triângulo ABC , respectivamente. Os circuncírculos de $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ intersectam o circuncírculo de ABC novamente em A_2, B_2, C_2 , respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Os pontos A_3, B_3, C_3 são as reflexões de A_1, B_1, C_1 com respeito aos pontos médios dos lados BC, CA, AB , respectivamente. Prove que os triângulos $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ são semelhantes.

Problema 4 (IMO SL 2014). Considere um círculo fixado Γ e três pontos fixos A, B , e C em Γ . É dado também um real $\lambda \in (0, 1)$ fixo. Para um ponto variável $P \notin \{A, B, C\}$ em Γ , seja M o ponto do segmento CP tal que $CM = \lambda \cdot CP$. Seja Q o segundo ponto de interseção dos circuncírculos de AMP e BMC . Prove que, ao variar P , Q varia sobre um círculo fixo.

2.1 Problemas de n -ágono

Além dos resultados elementares sobre transformações lineares no plano, é importante manter em mente que fatos “puramente algébricos”, principalmente aqueles associados a polinômios e raízes da unidade, podem ser bem úteis aqui.

Problema 5 (Cyberspace Math Competition 2020). Encontre todos os inteiros $n \geq 3$ para os quais vale a seguinte afirmação:

Se \mathcal{P} é um n -ágono convexo com $n - 1$ lados congruentes e $n - 1$ ângulos congruentes, então \mathcal{P} é um polígono regular.

Problema 6 (CIIM 2022). Danielle desenha no plano um ponto O e um conjunto de pontos $P = \{P_0, P_1, \dots, P_{2022}\}$ tais que

$$\angle P_0OP_1 = \angle P_1OP_2 = \dots = \angle P_{2021}OP_{2022} = \alpha, 0 < \alpha < \pi$$

, onde os ângulos são medidos em sentido anti-horário e, para $0 \leq n \leq 2022$, vale $OP_n = r^n$ com $r > 1$ um número real dado. Em seguida, obtém novos conjuntos de pontos no plano iterando o seguinte processo: dado um conjunto de pontos $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ no plano, constrói-se um novo conjunto de pontos $\{B_0, B_1, \dots, B_{n-1}\}$ de modo que $A_kA_{k+1}B_k$ seja um triângulo equilátero orientado em sentido horário para $0 \leq k \leq n - 1$. Depois de realizar o processo 2022 vezes a partir do conjunto P , Danielle obtém um único ponto X . Se d é a distância de X ao ponto O , demonstrar que

$$(r - 1)^{2022} \leq d \leq (r + 1)^{2022}$$

Problema 7 (KöMaL A.277). Seja H_1 um polígono de n lados. Construa a sequência H_1, H_2, \dots, H_n de polígonos como segue. Tendo construído H_k , H_{k+1} é obtido refletindo cada vértice de H_k por seu k -ésimo vizinho no sentido anti-horário. Prove que se n é primo, H_1 e H_n são semelhantes.

(Bônus: ache a razão de semelhança.)

Problema 8. Seja P um ponto arbitrário no arco menor A_0A_{n-1} do círculo circunscrito ao polígono regular $A_0A_1 \dots A_{n-1}$. Sejam h_1, h_2, \dots, h_n as distâncias de P para as retas suporte de $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_0$ respectivamente. Prove que

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \dots + \frac{1}{h_{n-1}} = \frac{1}{h_n}$$