Complexos e Geometria

Do a ao $\overline{z}$

Marcelo Machado Lage

2023

1 Introdução

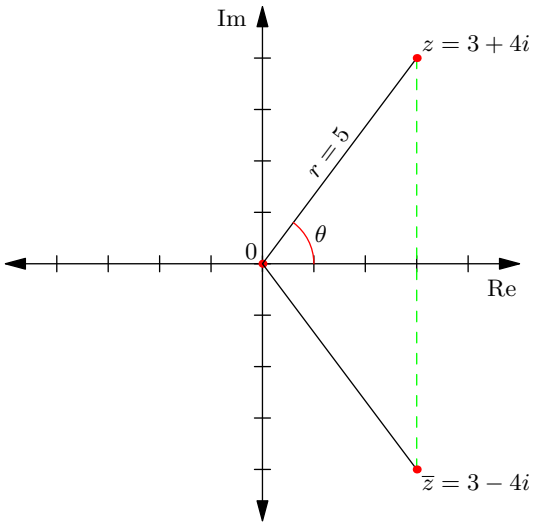
Os números complexos $\mathbb{C}$ são os números da forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e i é tal que $i^2 = -1$. Aqui, a é chamada a *parte real* de z e b, a *parte imaginária* de z.

Uma outra representação útil de números complexos diferentes do 0 é

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$

, para $\arg z = \theta \in [0, 2\pi)$ e $|z| = r \in \mathbb{R}_{>0}$. Além disso, $\frac{b}{a} = \tan\theta, r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

As duas representações de um mesmo número complexo z sugerem fortemente uma forma de representá-lo no plano (muito similar ao $\mathbb{R}^2$, mas em vez de eixos x e y temos o eixo real Re e o eixo imaginário Im).



Vale ressaltar que, ao mesmo tempo que um ponto no plano complexo, z pode ser visto como o vetor com origem no 0 e extremidade no z, e $|z|$ é o módulo desse vetor.

A cada complexo z podemos associar o seu conjugado $\overline{z} = a - bi = re^{-i\theta}$. É imediato verificar que

$$\overline{z_1 \star z_2} = \overline{z_1} \star \overline{z_2}, \star \in \{+, -, \cdot, \}$$

e, além disso,

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

Daí, temos que $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ e $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

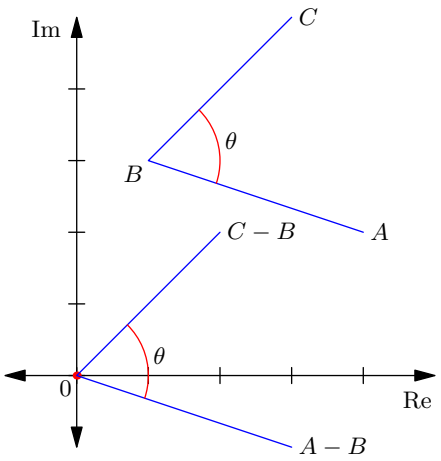
2 Ângulos em complexos

Vamos olhar com mais calma o que podemos tirar geometricamente dessas propriedades básicas de complexos.

$$\begin{aligned}\operatorname{cis} a \operatorname{cis} b &= (\cos a + i \operatorname{sen} b)(\cos b + i \operatorname{sen} b) \\ &= (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) + i(\cos a \operatorname{sen} b + \cos b \operatorname{sen} a) \\ &= \cos(a+b) + i \operatorname{sen}(a+b) \\ &= \operatorname{cis}(a+b)\end{aligned}$$

O que isso nos diz é que, ao multiplicar dois complexos, somamos seus argumentos e multiplicamos seus valores absolutos. De forma mais concreta, $z \mapsto iz$ é a transformação que rotaciona z em $90°$ *no sentido anti-horário* em torno da origem.

Vamos olhar para um ângulo genérico *orientado* $\measuredangle ABC$ no plano complexo.



Transladar B para a origem não altera θ, e no ângulo transladado sabemos que $\arg(C-B) = \theta + \arg(A-B)$ (módulo $180°$), isto é:

$$\frac{C-B}{A-B} \in \operatorname{cis}\theta \cdot \mathbb{R} \qquad (\clubsuit)$$

Além disso, $\frac{C-B}{A-B}$ tem valor absoluto $\frac{|BC|}{|BA|}$, e portanto podemos descrever facilmente semelhanças de triângulos no plano complexo:

Proposição 1. Sejam $\triangle ABC, \triangle XYZ$ *de mesma orientação* (isto é, ambos no sentido horário ou ambos no sentido anti-horário). Então

$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \iff \frac{C-B}{A-B} = \frac{Z-Y}{X-Y}$$

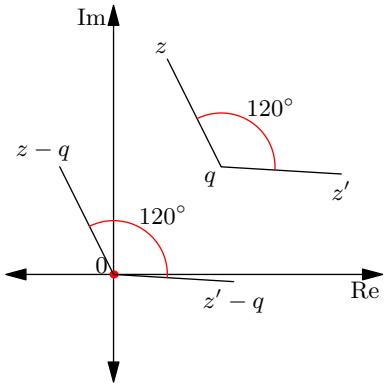
De forma levemente mais geral, a condição sobre o ângulo direcionado $\measuredangle(l,m)$, onde $l = AB, m = CD$, é:

$$\frac{C-D}{A-B} \in \operatorname{cis}(\measuredangle(l,m)) \cdot \mathbb{R} \qquad (1)$$

Vamos ver um problema onde podemos usar essas ideias de semelhanças de triângulo:

Problema Resolvido 1 (IMO 1986)**.** É dado um ponto P_0 no plano do triângulo $A_1A_2A_3$. Defina $A_s = A_{s-3}$ para $s \geq 4$. Construa um conjunto de pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tais que P_{k+1} é a imagem de P_k sob uma rotação de centro A_{k+1} e ângulo $120°$ no sentido horário para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Prove que se $P_{1986} = P_0$, $A_1A_2A_3$ é equilátero.

Solução. Para um q no complexo qualquer, vamos calcular quem é a imagem de z por uma rotação de $120°$ no sentido horário.



Se $\omega = \text{cis}(-120°)$, temos por (♣):

$$\frac{z'-q}{z-q} = \omega\frac{|z'-q|}{|z-q|} = \omega \implies z' = \omega z + (1-\omega)q$$

Se $A_1 = a, A_2 = b, A_3 = c, P_0 = p$, obtemos:

$$\begin{aligned}
P_0 &= p \\
P_1 &= \omega p + (1-\omega)a \\
P_2 &= \omega(\omega p + (1-\omega)a) + (1-\omega)b \\
P_3 &= \omega(\omega(\omega p + (1-\omega)a) + (1-\omega)b) + (1-\omega)c \\
&= \omega^3 p + \omega^2 a - \omega^3 a + \omega b - \omega^2 b + c - \omega c \\
&= p + (1-\omega)\underbrace{(\omega^2 a + \omega b + c)}_{t}
\end{aligned}$$

Logo, como t depende apenas de a, b, c, segue que $P_{k+3} = P_k + (1-\omega)t$. Em particular, $P_{1986} = P_0 + 662(1-\omega)t$ e portanto $P_{1986} = P_0 \iff t = 0$.

Mas como ω é raiz cúbica primiriva da unidade, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Substituindo $\omega^2 = -1 - \omega$ em $t = 0$:

$$t = 0 \iff (-1-\omega)a + \omega b + c = 0 \iff \frac{b-a}{c-a} = -\omega$$

$$\iff \begin{cases} \measuredangle A_3A_1A_2 = -(-120°) = -60° \\ A_1A_2 = A_1A_3 \end{cases} \iff \triangle A_1A_2A_3 \text{ equilátero no sentido horário}$$

□

3 Fórmulas

3.1 Fórmulas gerais

Proposição 2. $AB \parallel CD$ se, e somente se,

$$\frac{A-B}{C-D} \in \mathbb{R}$$

Prova. Imediato de (1). Outro jeito de visualizar isso é que os vetores $A-B, C-D$ são múltiplos um do outro. □

Corolário 3. $ABCD$ é um paralelogramo se, e somente se, $A + C = B + D$.

Corolário 4. A, B, Z são colineares se, e somente se,

$$\frac{Z-A}{B-A} \in \mathbb{R}$$

.

Esse corolário também segue de (♣): A, B, Z colineares se, e somente se, $\measuredangle BAZ = 0$.

Proposição 5. $AB \perp CD$ se, e somente se,

$$\frac{C-D}{B-A} \in i\mathbb{R}$$

Prova. Segue de (♣), uma vez que $\operatorname{cis} 90° = i$. □

Proposição 6. A, B, C, D estão sobre uma mesma circunferência se, e somente se,

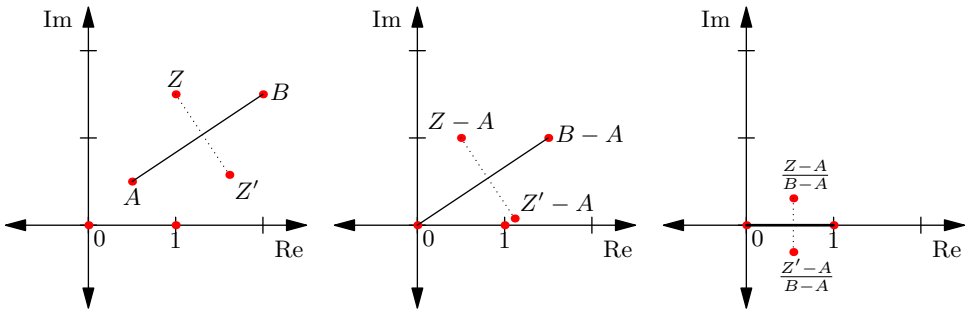
$$\frac{B-A}{C-A} \Big/ \frac{B-D}{C-D} \in \mathbb{R}$$

Prova. Em ângulos direcionados, $(ABCD)$ é cíclico se, e somente se, $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$ ("problemas de configuração" não existem). E é claro que $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB \iff \operatorname{cis}(\measuredangle CAB) = \operatorname{cis}(\measuredangle CDB)$, pois $0 < \measuredangle CAB, \measuredangle CDB < 180°$. □

Proposição 7. A reflexão de Z por AB é dada por

$$Z' = \overline{\left(\frac{Z-A}{B-A}\right)} \cdot (B-A) + A$$

Prova. A vantagem de escrever a fórmula dessa forma, em vez de apresentá-la com os conjugados abertos, é que é fácil rededuzi-la a partir de sua interpretação geométrica em vez de decorá-la.



Mais para a frente iremos estudar transformações no plano complexo e ficará claro que o feito pode ser visto como a transformação $\phi(w) = \frac{w-A}{B-A}$ aliada a composições do tipo $\phi(Z') = \overline{\phi(Z)}$ ($\phi(AB)$ é a reta real, e para refletir por ela basta tomar o conjugado). □

Proposição 8. A área *direcionada* de $\triangle ABC$ é dada por

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} A & \overline{A} & 1 \\ B & \overline{B} & 1 \\ C & \overline{C} & 1 \end{vmatrix}$$

Vale a pena manter em mente que A, B, C são colineares se, e somente se, o determinante acima é 0.

3.2 Outras fórmulas

O **círculo unitário** é possivelmente o subconjunto não trivial mais importante de $\mathbb{C}$. É definido como o círculo de raio 1 com centro na origem

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

De $z\overline{z} = |z|^2$, segue que z é um ponto do círculo unitário se, e somente se, $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
No que segue, a, b, c, d são pontos genéricos sobre o círculo unitário.

Proposição 9 (Equação da corda)**.** z está sobre a corda ab se, e somente se, $z + ab\overline{z} = a + b$.

Prova. De (♣), $z \in ab \iff \frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

$$\frac{z-a}{b-a} \in \mathbb{R} \iff \frac{z-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} \iff \frac{z-a}{b-a} = \frac{\overline{z} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{ab\overline{z} - b}{a-b} \iff z + ab\overline{z} = a + b$$

□

Corolário 10 (Equação da tangente)**.** Fazendo $b \to a$, a equação da tangente por a é

$$a + a^2\overline{z} = 2a$$

Proposição 11 (Interseção de cordas)**.** A cordas ab e cd se intersectam em

$$\frac{ab(c+d) - cd(a+b)}{ab - cd}$$

Corolário 12 (Interseção de tangentes)**.** As tangentes por a e b ("cordas" aa e bb) se intersectam em

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Proposição 13 (Reflexão por corda)**.** A reflexão de z por ab é

$$a + b - ab\overline{z}$$

Corolário 14 (Projeção na corda)**.** A projeção de z em ab é

$$\frac{1}{2}(z + a + b - ab\overline{z})$$

Em muitos problemas, podemos querer que um círculo da nossa figura seja complexado como o círculo unitário. Por isso, é importante saber algumas fórmulas de centros.

Proposição 15. Sejam O, G, H o circuncentro, o baricentro e o ortocentro de ABC ($A = a, B = b, C = c$). Então

$$O = 0, \quad G = \frac{a+b+c}{3}, \quad H = a + b + c$$

Prova. $O = 0$ é trivial. $G = \frac{a+b+c}{3}$ é claro dada a interpretação de a, b, c como vetores ($\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ é o centro de massa do triângulo). $H = a + b + c$ segue da Reta de Euler: $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. □

Problema Resolvido 2 (Reta de Simson)**.** Sejam $\triangle ABC$ um triângulo de ortocentro H e P um ponto no circuncírculo de ABC. Prove que as projeções de P sobre os lados do triângulo estão sobre uma reta que bissecta a reta PH.

Solução. Parametrizamos como se espera: $(ABCP)$ no círculo unitário ($A = a, B = b, C = c, P = p$). Sejam x, y, z as reflexões de p por BC, CA, AB. Queremos provar que $x, y, z, a + b + c$ estão sobre uma reta.

$$x = b + c - bc\overline{p} = b + c - \frac{bc}{p} \implies h - x = (a+b+c) - \left(b + c - \frac{bc}{p}\right) = \frac{ap + bc}{p}$$

Logo, $\frac{h-x}{h-y} = \frac{ap+bc}{p} \Big/ \frac{bp+ac}{p} = \frac{ap+bc}{bp+ac}$, que de fato é real, pois:

$$\overline{\left(\frac{ap+bc}{bp+ac}\right)} = \frac{\frac{1}{ap} + \frac{1}{bc}}{\frac{1}{bp} + \frac{1}{ac}} = \frac{ap+bc}{bp+ac}$$

□

Proposição 16 (Fórmula do circuncentro)**.** O circuncentro do triângulo de vértices x, y, z é dado por

$$o = \frac{\begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}}$$

Prova. Como se pode imaginar da cara da fórmula, usaremos Cramer. Sendo o o circuncentro de x, y, z e $R \in RR$ o circunraio, nosso sistema é

$$\begin{cases} |x-o| = R \\ |y-o| = R \\ |z-o| = R \end{cases} \iff \begin{cases} -\overline{o}x - o\overline{x} + (o\overline{o} - R) = -x\overline{x} \\ -\overline{o}y - o\overline{y} + (o\overline{o} - R) = -y\overline{y} \\ -\overline{o}z - o\overline{z} + (o\overline{o} - R) = -z\overline{z} \end{cases}$$

Resolvendo para $o, \overline{o}, o\overline{o} - R$:

$$o = \frac{\begin{vmatrix} -x & -x\overline{x} & 1 \\ -y & -y\overline{y} & 1 \\ -z & -z\overline{z} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -x & -\overline{x} & 1 \\ -y & -\overline{y} & 1 \\ -z & -\overline{z} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}}$$

□

Apesar de existir uma fórmula não-tão-feia-assim, não costuma ser má ideia calcular circuncentros na mão, principalmente se houver mediatrizes fáceis.

Note que ainda não falamos de alguns pontos bastante importantes, como o incentro e os exincentros. A parametrização deles não é trivial, porque depende dos pontos médios dos arcos. O que acontece a diferenciação de bissetrizes internas e externas não vem embutida em complexos, uma vez que com ângulos direcionados não tratamos mais de semirretas, e sim da reta toda.

Para resolver esse problema, usamos o seguinte lema:

Lema 17 (Parametrização a^2, b^2, c^2)**.** Seja $\triangle ABC$ um triângulo cujo circuncírculo é o círculo unitário, e D, E, F os pontos médios dos arcos menores BC, CA, AB. Então existem complexos a, b, c tais que

$$A = a^2, B = b^2, C = c^2, D = -bc, E = -ac, F = -ab$$

Prova. As 3 primeiras condições são fáceis de satisfazer (isto é, $A = a^2, B = b^2, C = c^2$ para alguns a, b, c). Então como $\frac{B}{D} = \frac{D}{C}$, temos que $D = \pm bc$.

Note que

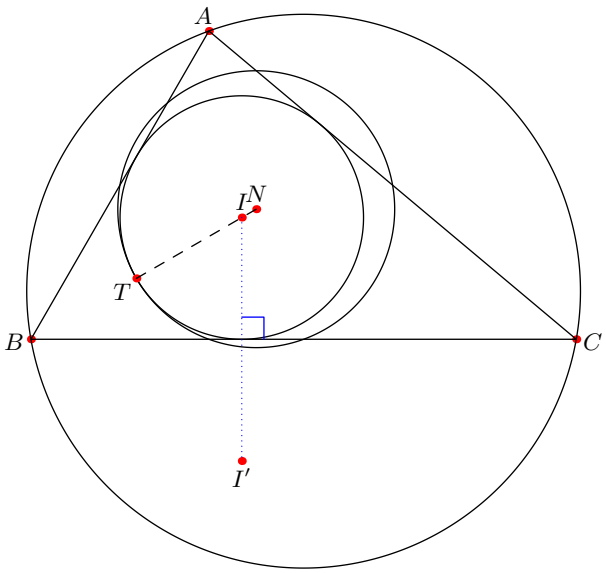
$$\frac{DEF}{ABC} = \frac{D}{B} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{E}{C} = \operatorname{cis}(\angle A) \operatorname{cis}(\angle C) \operatorname{cis}(\angle B) = \operatorname{cis} 180^\circ = -1$$

, onde supusemos SPG que ABC está rotulado no sentido horário (o caso anti-horário é análogo.)

Dessa forma, ou os três pontos médios estão com o sinal certo (e terminamos) ou só um deles está. Se for esse segundo caso, suponha que o ponto médio de arco de sinal certo é D. Então trocamos a por $-a$ e dos seis pontos modificamos o sinal *apenas* dos outros dois pontos médios de arcos. □

Corolário 18 (Incentro e exincentros)**.** $I = -ab - bc - ca$ (pois é o ortocentro de DEF), $I_a = 2D - I = ab - bc + ca$ e fórmulas análogas para os outros exincentros.

Problema Resolvido 3 (Teorema de Feuerbach)**.** O Círculo dos Nove Pontos de $\triangle ABC$ é tangente ao seu incírculo.



Solução. Vamos complexar com $\triangle ABC$ no círculo unitário e a parametrização de incentro ($A = a^2, B = b^2, C = c^2, I = -ab - bc - ca, N = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$). É fato conhecido que o raio do círculo dos nove pontos é $\frac{1}{2}$ e a desigualdade com inraio $r \leq \frac{1}{2}$, logo para mostrar a tangência basta mostrar que $|NI| + r = \frac{1}{2}$.

$$N - I = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{2} \implies 2\,|NI| = \left|a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca\right| = |a + b + c|^2$$

Por outro lado, se I' é a reflexão de I por BC, temos:

$$\begin{aligned}
2r = |I - I'| &= \left|-ab - bc - ca - \left(b^2 + c^2 - b^2c^2\left(-\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} - \frac{1}{ca}\right)\right)\right| \\
&= \left|-ab - bc - ca - b^2 - c^2 - \frac{bc^2}{a} - bc - \frac{b^2c}{a}\right| \\
&= \left|-(b+c)a - (b+c)^2 - (b+c)\frac{bc}{a}\right| \\
&= \left|\frac{b+c}{a}\right| \left|a^2 + ab + ac + bc\right| \\
&= \frac{1}{|a|}\,|b+c|\,|a+b|\,|a+c| \\
&= |(a+b)(b+c)(c+a)|
\end{aligned}$$

Logo, basta provar $1 - |a + b + c|^2 = |(a + b)(b + c)(c + a)|$, que elevando ao quadrado é o mesmo

que:

$$1-2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]^2=(a+b)(b+c)(c+a)\left(\frac{a+b}{ab}\right)\left(\frac{b+c}{bc}\right)\left(\frac{c+a}{ca}\right)$$

$$\iff$$

$$1-6-2\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}+9+6\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}+\left(\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\right)^2$$

$$\iff$$

$$4+4\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}+\left(\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{2abc+\sum_{\text{sym}}a^2b}{abc}\right)^2$$

$$\iff$$

$$\left(2+\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}\right)^2=\left(2+\sum_{\text{sym}}\frac{a}{b}\right)^2$$

, como queríamos. □

4 Conta Inteligente

Note que no último problema, evitamos "abrir as contas" indiscriminadamente. Em vez disso, buscamos fatorações que pudessem diminuir as contas e expressões simétricas nas nossas variáveis. Isso deixou as contas mais organizadas e mais fáceis de conferir.

A grande importância de treinar contas com complexos (além, é claro, de praticar as fórmulas) é se acostumar com essas técnicas de conta que vão *bem* além de "ah, é só abrir tudo e no final vai cancelar". Algumas recomendações gerais são:

- **Parametrize bem!** Algumas escolhas padrão são o circuncírculo ou o incírculo de $\triangle ABC$ no círculo unitário.
- **Faça observações sintéticas!** Só comece a conta quando você tiver um planejamento razoável de como vai integrar as partes da figura na conta. Gastar um tempo com considerações/conjecturas sintéticas que reduzam o número de parâmetros da figura ou abreviem partes da conta é o melhor a se fazer.

  Por exemplo, se você escolher o triângulo de contato de $\triangle ABC$ como seu triângulo de referência mas o problema usar a reta OI de ABC, muito provavelmente será útil lembrar que OI de ABC é a Reta de Euler de DEF (se você nunca viu esse fato antes, prove-o!).
- **Fatorar é melhor que abrir!** Costuma ser uma ideia melhor deixar o que está em evidência de um lado da equação separado. Isso inclusive ajuda a "cartear" possíveis fatores do outro lado.
- **Explore simetria!**
  - Se um ponto está definido simetricamente em b, c, abra a conta pensando nos termos como polinômios em a, porque os coeficientes terão de ser coisas simétricas em b, c
  - Se você quer provar que as retas AA_1, BB_1, CC_1 concorrem, uma ideia que costuma funcionar bem é intersectar AA_1, BB_1 e provar que essa interseção é simétrica em a, b, c.

    Pode ser que o problema peça algo que pareça mais difícil ainda, como provar que que elas se intersectam em uma reta l (definida simetricamente em A, B, C, como a Reta de Euler de $\triangle ABC$), mas conta pode ser ainda menor com essa dica adicional! Intersecte AA_1 e l e prove que essa interseção é uma função racional simétrica em a, b, c.
  - Relações de Girard são muito úteis. Uma corda do círculo unitário não precisa de *cada uma* das suas extremidades para ser definida. Basta saber as *expressões simétricas* (no caso, seu produto e sua soma) para calcular qualquer ponto razoável da figura.
- **Saiba conferir conta!**

  - Em geral não se recomenda colocar um dos vértices (digamos a, b, c) do triângulo para ser um complexo fixo (digamos $a = 1$). Uma vantagem disso é que, se todos os pontos da figura inicial têm *grau* 1 (i.e., são literais de grau 1), então qualquer ponto que surgir na conta deve ter grau 1 também, além de ser homogêneo. Tome cuidado com os graus dos conjugados.

    Concretamente, digamos que você calculou a fórmula da interseção das cordas ab e cd e chegou à fórmula ERRADA $\frac{abcd-(a+b)(c+d)}{ab-cd}$. Um jeito de suspeitar que ela está errada é que o numerador tem grau 4 como polinômio multivariável em a, b, c, d e o denominador tem grau 2, logo a função racional tem grau 2 (que não é 1). Outro jeito de suspeitar que ela está errada é que o numerador não é homogêneo como polinômio multivariável em a, b, c, d.

    Outro técnica interessante de verificação de conta é considerar o que acontece sinteticamente quando um determinado numerador/denominador fica nulo. Por exemplo, a intersecão das tangentes por a e b no círculo fica engraçada se $a + b \to 0$. Isso sinteticamente faz sentido: se a corda fica próxima do diâmetro a interseção das tangentes por suas extremidades vai para o infinito.

- **Pense abstratamente!** Principalmente se a figura depender de um ponto genérico que varie de modo contínuo. Isso será melhor explorado na parte de transformações.

5 Nenhuma Técnica é uma Panaceia

E complexos não é diferente. Em várias situações não é uma boa ideia tentar usar complexos "a seco", por exemplo quando o problema tem mais de um círculo ou muitas interseções de retas sem um círculo central na figura.

(Afterthought: na verdade, essa história de "mais de um círculo não pode usar complexos" é bem mais trabalhável do que pode parecer. Na maioria das vezes, mais de um círculo pode ser transformado em algo mais simples e fundamentalmente "complexável", usando por exemplo inversão, homotetia, eixos radicais.)

Além disso, é óbvio que nem todo problema com solução simples por outros métodos (sintéticos, projetivos, computacionais...) necessariamente terá uma solução igualmente simples com complexos. Por isso, vale o lembrete de abrir mão do purismo sempre que possível e, se decidir fazer a conta, tenha um planejamento razoável sobre ela antes antes de colocar a mão na massa indiscriminadamente.

6 Problemas

Os problemas não estão em ordem de dificuldade.

Problemas marcados com (*) são *complexáveis*, mas possivelmente são mais enroscados que os demais. (Isso quer dizer que eu não terminei por mim mesmo as contas nesses problemas.)

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico. Seja H_A o ortocentro de BCD. Defina H_B, H_C, H_D analogamente. Prove que AH_A, BH_B, CH_C e DH_D são concorrentes.

Problema 2. Seja P um ponto qualquer no plano de $\triangle ABC$ de ortocentro H e circuncírculo Ω. Sejam A_1, B_1, C_1 as interseções de AP, BP, CP com Ω, respectivamente.

1. Sejam A_2, B_2, C_2 as reflexões de A_1, B_1, C_1 pelos pontos médios de BC, CA, AB, respectivamente. Prove que H, A_2, B_2, C_2 estão sobre uma mesma circunferência.

2. Sejam A_3, B_3, C_3 as reflexões de A_1, B_1, C_1 pelas retas BC, CA, AB, respectivamente. Prove que H, A_3, B_3, C_3 estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 3 (Ponto de Schiffler)**.** Seja I o incentro do triângulo ABC. Prove que as Retas de Euler de $\triangle ABC, \triangle IBC, \triangle AIC, \triangle ABI$ concorrem.

Problema 4 (OBM 2022)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB < AC$. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.

Problema 5 (OBM 2017)**.** No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.

Problema 6 (OBM 2015)**.** Seja ABC um triângulo escaleno e acutângulo e N o centro do círculo que passa pelos pés das três alturas do triângulo. Seja D a interseção das retas tangentes ao circuncírculo de ABC e que passam por B e C. Prove que A, D e N são colineares se, e somente se, $\angle BAC = 45°$.

Problema 7 (OBM 2015)**.** Seja ABC um triângulo escaleno e X, Y e Z pontos sobre as retas BC, CA, AB, respectivamente, tais que $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$. Os circuncírculos de BXZ e CXY se cortam em $P \neq X$. Prove que P está sobre a circunferência cujo diâmetro tem extremidades no ortocentro H e no baricentro G de ABC.

Problema 8 (Ibero 2020)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo e escaleno. Sejam H o ortocentro e O o circuncentro do triângulo ABC, e seja P um ponto interior do segmento HO. A circunferência de centro P e raio PA interseta novamente as retas AB e AC nos pontos R e S, respetivamente. Denotamos por Q o ponto simétrico ao ponto P com respeito à mediatriz de BC. Demonstre que os pontos P, Q, R e S pertencem a uma mesma circunferência.

Problema 9 (IMO 2019)**.** Seja I o incentro do triângulo acutângulo ABC com $AB \neq AC$. O incírculo ω de ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em D, E, e F, respectivamente. A reta por D perpendicular a EF intersecta ω em R. A reta AR encontra ω novamente em P. Os circuncírculos dos triângulos PCE e PBF se intersectam novamente em $Q \neq P$.

Prove que as retas DI e PQ se intersectam na reta que passa por A e é perpendicular a AI.

Problema 10 (IMO 2014)**.** Os pontos P e Q se encontram sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscritas ao triângulo ABC.

Problema 11 (IMO 2012)**.** São dados o triângulo ABC e J o centro do A-exincírculo de ABC. Esse exincírculo é tangente a BC em M, e às retas AB e AC em K e L, respectivamente. As retas LM e BJ se intersectam em F, e as retas KM e CJ se intersectam novamente em G. Seja S o ponto de interseção de AF e BC, e T o ponto de interseção de AG e BC. Prove que M é o ponto médio de ST.

Problema 12 (IMO 2011)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente. Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.

Problema 13 (IMO 2000)**.** Sejam AH_1, BH_2, CH_3 as alturas do triângulo acutângulo ABC. Seu incírculo tangencia BC, AC e AB em T_1, T_2 e T_3 respectivamente. Considere as reflexões das retas H_1H_2, H_2H_3 e H_3H_1 por T_1T_2, T_2T_3 e T_3T_1. Prove que essas retas determinam um triângulo cujos vértices pertencem ao incírculo de ABC.

Problema 14 (IMO SL 2018)**.** Seja ABC um triângulo de circuncírculo Ω e incentro I. Uma reta ℓ intersecta AI, BI e CI nos pontos D, E e F, respectivamente, distintos de A, B, C e I. As mediatrizes x, y e z dos segmentos AD BE, e CF, respectivamente, determinam um triângulo Θ.

Mostre que o circuncírculo de Θ é tangente a Ω.

Problema 15 (IMO SL 2009)**.** Seja ABC um triângulo. O incírculo de ABC é tangente aos lados AB e AC nos pontos Z e Y, respectivamente. Seja G o ponto onde as retas BY e CZ se intersectam, e sejam R e S os pontos tais que os quadriláteros $BCYR$ e $BCSZ$ são paralelogramos. Prove que $GR = GS$.

Problema 16 (USAMO 2012)**.** Seja P um ponto no plano do triângulo $\triangle ABC$, e γ um reta passando por P. Seja A' a interseção da reflexão de PA por γ com a reta BC. Defina B', C' analogamente. Prove que A', B', C' são colineares.

Problema 17 (USA TST 2023)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam M o ponto médio do lado BC, E e F os pés das alturas de B e C, respectivamente. Suponha que as tangentes externas comuns dos circuncírculos de BME e CMF se intersectam K, e que K está sobre o circuncírculo de ABC. Prove que AK é perpendicular a BC.

Problema 18 (USA TSTST 2022)**.** Sejam O e H o circuncentro e ortocentro, respectivamente, do triângulo acutângulo escaleno ABC. A mediatriz de $\overline{AH}$ intersecta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em X_A e Y_A respectivamente. Seja K_A a interseção dos circuncírculos dos triângulos OX_AY_A e BOC diferente de O.

Defina K_B e K_C analogamente repetindo essa construção mais duas vezes. Prove que K_A, K_B, K_C, e O são concíclicos.

Problema 19 (USA TSTST 2014)**.** Considere um pentágono convexo circunscrito a um círculo. Chamamos as retas que ligam vértices do pentágono aos pontos opostos de tangência com o círculo de *gergonianas*.

1. Prove que se quatro gergonianas concorrem, as cinco concorrem.
2. (*) Prove que se uma tripla de gergonianas concorre, outra tripla de georganianas concorre.

Problema 20 (IMEO 2020)**.** Sejam O, I, e ω o circuncentro, incentro, e incírculo do triângulo não equilátero $\triangle ABC$. Seja ω_A o (único) círculo tangente a AB e AC, tal que a corda comum de ω_A e ω passa pelo centro de ω_A. Seja O_A o centro ω_A. Defina $\omega_B, O_B, \omega_C, O_C$ analogamente.

Se ω tangencia BC, CA, AB em D, E, F respectivamente, prove que as perpendiculares de D, E, F a O_BO_C, O_CO_A, O_AO_B concorrem num ponto sobre a reta OI.

Problema 21 (RMM 2020)**.** Seja ABC um triângulo retângulo em C. Seja I o incentro do triângulo ABC e seja D o pé da perpendicular de C sobre AB. O incírculo ω do triângulo ABC é tangente aos lados BC, CA e AB em A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Sejam E e F as reflexões de C nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente. Sejam K e L as reflexões de D nas retas C_1A_1 e C_1B_1, respectivamente.

Prove que os circuncírculos dos triângulos A_1EI, B_1FI e C_1KL possuem um ponto em comum.

Problema 22 (RMM 2019)**.** Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com AB paralelo a DC. Seja E o ponto médio de AC. Denote por Γ e Ω os circuncírculos dos triângulos ABE e CDE, respectivamente. A tangente a Γ por A e a tangente a Ω por D se intersectam em P. Prove que PE é tangente a Ω.

Problema 23 (Kömal B. 5285)**.** No triângulo ABC acutângulo, $AB = AC$. A', B', C' são ponto móveis sobre o circuncírculo de ABC de tal forma que $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$, e os triângulos têm a mesma orientação. Seja P a interseção de BB' e CC'. Prove que todas as retas $A'P$ passam por um ponto comum.

Problema 24 (APMO 2021)**.** Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo cíclico e Γ seu circuncírculo. Seja E o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Seja L o centro do círculo tangente aos segmentos AB, BC, e CD, e M o ponto médio do arco BC de Γ que não contém A e D. Prove que o E-exincentro de BCE pertence à reta LM.

Problema 25 (USA TSTST 2016)**.** Seja ABC um triângulo, I seu incentro e D, E, F os pontos de tangência do incírculo com os lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ at D, E, F, respectivamente. Seja K o pé da altura de D para $\overline{EF}$. O circuncírculo de $\triangle AIB$ intersecta o incírculo em C_1 e C_2, e o circuncírculo de $\triangle AIC$ intersecta o incírculo em B_1 e B_2. Prove que o eixo radical de (BB_1B_2) and (CC_1C_2) passa pelo ponto médio M de $\overline{DK}$.

Problema 26 (EGMO 2017)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo escaleno. As reflexões do baricentro G e do circuncentro O de ABC pelo lados BC, CA, AB são denotadas G_1, G_2, G_3 e O_1, O_2, O_3, respectivamente. Mostre que os circuncírculos dos sete triângulos G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A e ABC têm um ponto comum.

Problema 27 (USA TST 2019)**.** Seja ABC um triângulo e M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Seja X um ponto tal que $\overline{AX}$ é tangente ao circuncírculo de ABC. ω_B é o círculo que passa por M e B e é tangente a $\overline{MX}$, e ω_C é o círculo que passa por N e C e é tangente a $\overline{NX}$. Prove que ω_B e ω_C se encontram num ponto sobre a reta BC.

Problema 28 (USA TSTST 2019)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo de ortocentro H e circuncírculo Γ. Uma reta por H intersecta AB e AC em E e F, respectivamente. Seja K o circuncentro de $\triangle AEF$, e suponha que a reta AK intersecta Γ novamente em D. Prove que a reta HK e a reta por D perpendicular a $\overline{BC}$ se encontram em Γ.

Problema 29 (Irã 2020)**.** O círculo Ω de centro I_A é o A-exincírculo de ABC, e é tangente a AB, AC em F, E, respectivamente. D é a reflexão de A por I_AB. As retas DI_A e EF se encontram em K. Prove que o circuncentro de DKE, o ponto médio de BC e I_A são colineares.

Problema 30 (IMO SL 2016)**.** Seja D o pé da perpendicular de A para a reta de Euler do triângulo acutângulo escaleno ABC. Uma circunferência ω de centro S passa por A e D, e intersecta os lados AB e AC em X e Y, respectivamente. Seja P o pé da altura de A em BC, e M o ponto médio de BC. Prove que o circuncentro do triângulo XSY é equidistante de P e M.

Problema 31 (USEMO 2020 *)**.** Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. Seja Γ o circuncírculo de ABC e N o ponto médio de OH. As tangentes a Γ em B e C e a reta por H perpendicular a AN determinam um triângulo cujo circuncírculo denotamos ω_A. Defina ω_B e ω_C de forma análoga. Prove que o centro radical de ω_A, ω_B e ω_C está na reta OH.