Complexos e Geometria

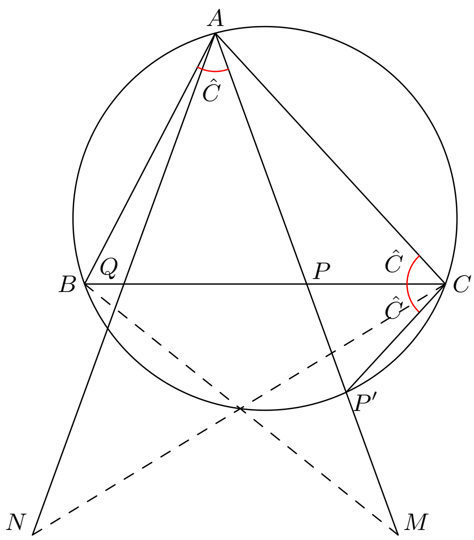
Problemas selecionados

Marcelo Machado Lage

2023

1 IMO 2014 - P4 / IMO Shortlist 2014 - G1

Problema. Os pontos P e Q se encontram sobre o lado BC de um triângulo acutângulo ABC de modo que $\angle PAB = \angle BCA$ e $\angle CAQ = \angle ABC$. Os pontos M e N encontram-se sobre as retas AP e AQ, respectivamente, de modo que P é o ponto médio de AN. Prove que as retas BM e CN se intersectam sobre a circunferência circunscritas ao triângulo ABC.



Solução. Uma ideia para complexar esse problema seria seguir ao pé da letra o enunciado: parametrizar com (ABC) no círculo unitário com $A = a$ etc., calcular P, Q, M, N, intersectar BM e CN e provar que essa interseção é um complexo igual ao inverso do seu conjugado.

Mas dá para fazer algo melhor, que evita ter que intersectar essas duas retas potencialmente meio feias, que é calcular P, M, intersectar BM com o círculo unitário usando a fórmula da corda, o que dá uma conta mais direta e provar que essa interseção é uma função em a, b, c simétrica em b e c (de forma que se fizéssemos a interseção de CN com o círculo daria o mesmo ponto).

p é fácil de calcular usando ângulos com p'. Como $\angle ACB = \angle BCP'$, os arcos têm a mesma medida, isto é, $\frac{b}{a} = \frac{p'}{b} \implies p' = \frac{b^2}{a}$.

Pela interseção de cordas,

$$p = \frac{a\frac{b^2}{a}(b+c) - bc\left(a + \frac{b^2}{a}\right)}{a\frac{b^2}{a} - bc} = \frac{ab(b+c) - c(a^2+b^2)}{a(b-c)} = \frac{a^2(-c) + a(b^2+bc) + (-b^2c)}{a(b-c)}$$

$$m = 2p - a = \frac{a^2(-2c) + a(2b^2+2bc) + (-2b^2c) - a^2(b-c)}{a(b-c)} = \frac{a^2(-b-c) + a(2b^2+2bc) + (-2b^2c)}{a(b-c)}$$

Se X é a segunda interseção de BM com (ABC), $m + bx\overline{m} = b + x \iff x = \frac{m-b}{1-b\overline{m}}$

$$x = \frac{m-b}{1-b\overline{m}} = \frac{\frac{a^2(-b-c)+a(2b^2+2bc)+(-2b^2c)}{a(b-c)} - b}{1 - b\frac{\frac{(-b^2-bc)+a(2c+2b)+(-2a^2)}{a^2b^2c}}{\frac{1}{a}\cdot\frac{c-b}{bc}}} = \frac{\frac{a^2(-b-c)+a(2b^2+2bc)+(-2b^2c)}{a(b-c)} - b}{1 + \frac{(-b^2-bc)+a(2c+2b)+(-2a^2)}{a(b-c)}}$$

$$\implies x = \frac{a^2(-b-c)+a(2b^2+2bc)+(-2b^2c)-a(b^2-bc)}{a(b-c)+(-b^2-bc)+a(2c+2b)+(-2a^2)} = \frac{a^2(-b-c)+a(b^2+3bc)+(-2b^2c)}{(-b^2-bc)+a(3b+c)+(-2a^2)}$$

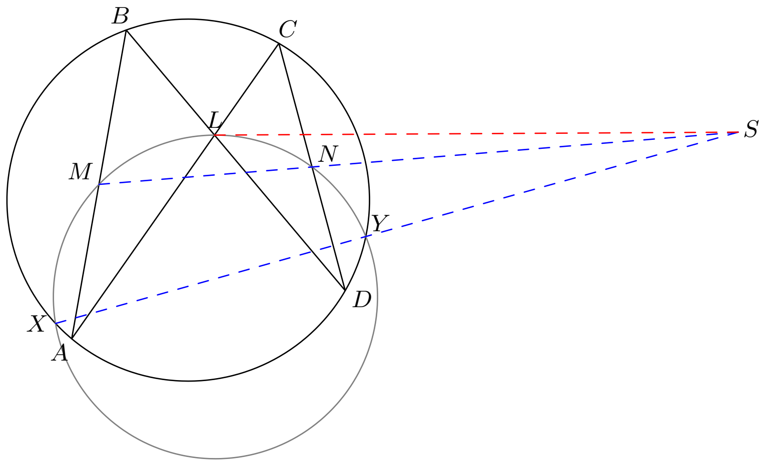
$$\implies x = \frac{(a-b)(a(-b-c)+2bc)}{(a-b)(-2a+b+c)} = \frac{-ab-ac+2bc}{-2a+b+c}$$

, que é simétrico em b e c, como queríamos.

$\square$

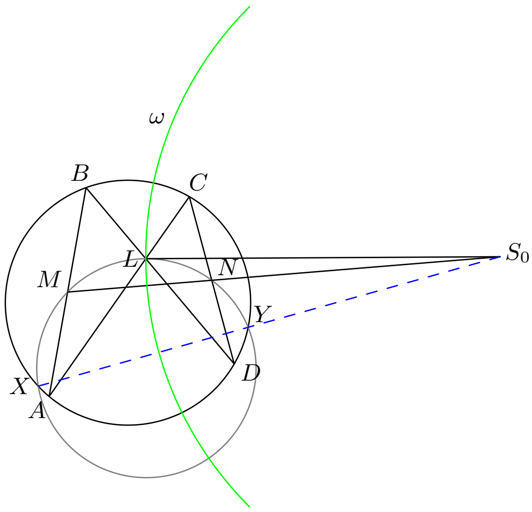
2 OMpD 2022 N3 - P4

Problema. Seja $ABCD$ um quadrilátero cíclico e M, N os pontos médios de AB e CD respectivamente. As diagonais AC e BD se intersectam em L. Suponha que o circuncírculo de LMN, de centro T, intersecta o circuncírculo de $ABCD$ em dois pontos distintos X, Y. Se a reta MN intersecta a reta XY em S e a reta XM intersecta a reta YN em P, prove que PL é perpendicular a ST.



Solução. Por polo e polar, é claro que P é um ponto da polar ℓ de S. Daí, como $\ell \perp ST$, temos que $PL \perp ST \iff L \in \ell \iff SL$ tangente a (LMN). Portanto, basta provar que as três retas coloridas da figura concorrem.

Para isso, seja S_0 a interseção da tangente a (LMN) por L com MN.



Considere o círculo ω de centro S_0 e raio S_0L. A inversão Φ por ω fixa (LMN), e fixará $(ABCD)$ se, e somente se, $\Phi(X) \in (ABCD)$. Como $\{X, Y\} = \{\Phi(X), \Phi(Y)\}$, Φ fixará $(ABCD)$ se, e somente se, S_0, X, Y são colineares. Logo, reduzimos o problema a provar que $(ABCD)$ e ω são ortogonais ou, ainda, que a inversão por $(ABCD)$ fixa ω.

Mas ω é um círculo conhecido. De fato, a definição de S_0 implica facilmente por marcação de ângulo que os pés das bissetrizes interna e externa de LMN com relação ao ângulo de L pertencem a ω. Em outras palavras, ω é o círculo L-Apolônio de $\triangle LMN$. Daí, segue que

$$Z \in \omega \iff \frac{ZM}{ZN} = \frac{LM}{LN} \overset{\triangle LBA \sim \triangle LCD}{=} \frac{AB}{CD}$$

Depois de tudo isso, podemos terminar complexando com $(ABCD)$ no círculo unitário ($A = a$ etc., $M = m$, $N = n$).

Um truque legal é que, dado um ponto diferente da origem no interior do círculo unitário, a corda que o tem como ponto médio é única. Ou seja, qualquer expressão simétrica nas duas variáveis a, b pode ser reescrita usando só uma variável complexa m, pelas relações abaixo:

$$\begin{cases} a+b=2m \\ a+b=m+ab\overline{m} \end{cases} \implies \begin{cases} a+b=2m \\ ab=\frac{m}{\overline{m}} \end{cases}$$

, e expressões equivalentes valem para c, d, n. Usar complexos aqui trata os ponto médios do problema de uma forma bastante algébrica e confortável. Note que ainda não tínhamos usado essa propriedade.

ω o obtemos em complexos usando a definição do Apolônio como razão fixa de segmentos:

$$z \in \omega \iff \frac{|z-m|}{|z-n|} = \frac{|a-b|}{|c-d|} \iff \frac{(z-m)(\overline{z}-\overline{m})}{(z-n)(\overline{z}-\overline{n})} = \frac{(a-b)\left(\frac{b-a}{ab}\right)}{(c-d)\left(\frac{d-c}{cd}\right)}$$

Usando a ideia de expressões simétricas com a e b:

$$(a-b)\left(\frac{b-a}{ab}\right) = -\left(\frac{(a+b)^2}{ab} - 4\right) = -\left(\frac{4m^2}{m/\overline{m}} - 4\right) = -4(m\overline{m}-1)$$

Substituindo o encontrado:

$$z \in \omega \iff \frac{z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + m\overline{m}}{z\overline{z} - \overline{n}z - n\overline{z} + n\overline{n}} = \frac{m\overline{m}-1}{n\overline{n}-1} \iff \frac{z\overline{z} - \overline{m}z - m\overline{z} + 1}{z\overline{z} - \overline{n}z - n\overline{z} + 1} = \frac{m\overline{m}-1}{n\overline{n}-1}$$

(usamos $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = \frac{\gamma}{\delta}$)

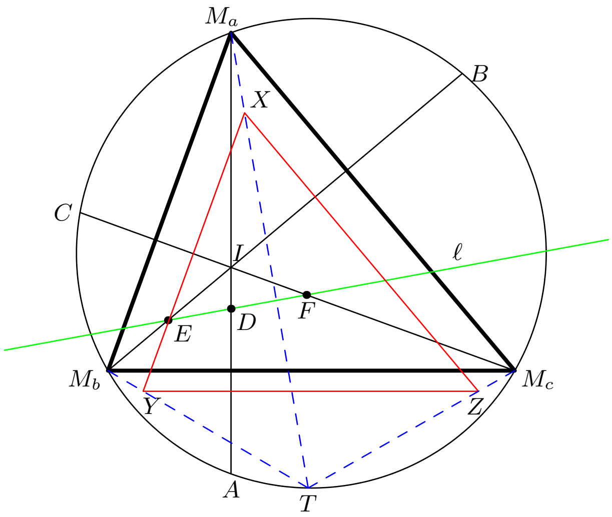
E é claro que z satisfaz essa última relação se, e somente se, $\frac{1}{\overline{z}}$ satisfaz. Como $z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$ é exatamente a inversão por $(ABCD)$, concluímos que ω é fixo por essa transformação, como queríamos.

$\square$

3 IMO Shortlist 2018 - G5

Problema. Seja ABC um triângulo de circuncírculo Ω e incentro I. Uma reta ℓ intersecta AI, BI e CI nos pontos D, E e F, respectivamente, distintos de A, B, C e I. As mediatrizes x, y e z dos segmentos AD BE, e CF, respectivamente, determinam um triângulo Θ.

Mostre que o circuncírculo de Θ é tangente a Ω.

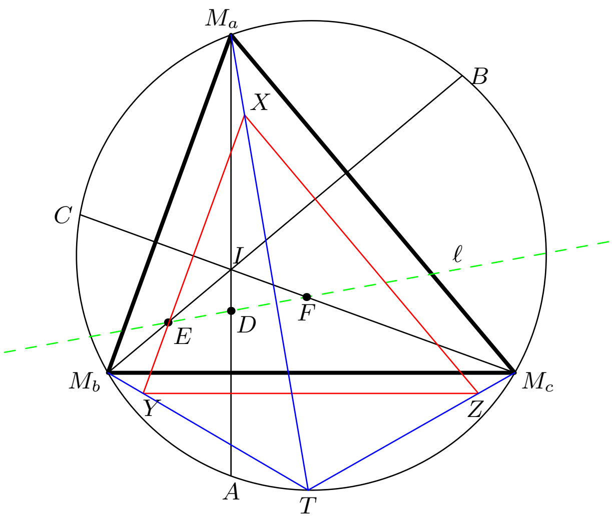


Solução. Nosso triângulo de referência será $M_aM_bM_c$ (pontos médios dos arcos menores). I é seu ortocentro e A, B e C as reflexões desse ortocentro pelos lados do triângulo de referência.

Sejam $X = y \cap z$, Y, Z análogos. É fácil ver que os triângulos $\triangle XYZ$ e $\triangle M_aM_bM_c$ têm lados correspondentes paralelos, e portanto são homotéticos. Para a tangência do problema, basta provar que o centro de homotetia T dos dois triângulos está sobre o Ω.

Vamos trabalhar mais as condições do problema. Primeiro, fixe E e F e varie D com velocidade constante sobre a reta M_aI. Y varia com velocidade constante sobre a reta z fixa, e portanto $M_bY \cap M_aX = T$ pertence a Ω e é diferente de M_a para exatamente uma escolha de D sobre M_aI.

Dessa forma, reduzimos o problema a provar que, dado $T \in \Omega$ e uma homotetia de centro T que leva $\triangle M_aM_bM_c$ em $\triangle XYZ$, os pontos D, E, F induzidos por essa transformação (isto é, as reflexões de A, B e C por YZ, ZX e XY, respectivamente) são colineares. (*Nota*: daqui é fácil terminar com Moving Points)



Parametrizando com Ω no círculo unitário, $M_a = a$ etc., $T = t$, $A = -\frac{bc}{a}$, etc. temos:

$$x = t + (a - t)k, \quad k \in \mathbb{R}$$

e análogo para y, z (mesmo k, da razão da homotetia).
Daí,

$$\begin{aligned}
d &= \overline{\left(\frac{-\frac{bc}{a}-y}{z-y}\right)} \cdot (z-y)+y \\
&= \overline{\left(\frac{-\frac{bc}{a}-t-(b-t)k}{(c-b)k}\right)} \cdot (c-b)k+t+(b-t)k \\
&= \frac{-\frac{a}{bc}-\frac{1}{t}-\frac{t-b}{bt}\cdot k}{\frac{b-c}{bc}\cdot k} \cdot (c-b)k+t+(b-t)k \\
&= \left(a+\frac{bc}{t}+\frac{c}{t}(t-b)k\right)+t+(b-t)k \\
&= a+t+(b+c)k+\frac{bc}{t}(1-k)
\end{aligned}$$

De onde segue:

$$d-e=(a-b)+(b-a)k+\frac{c}{t}(1-k)(b-a)=(a-b)(1-k)\left(1-\frac{c}{t}\right)=\left(\frac{1-k}{t}\right)(a-b)(t-c)$$

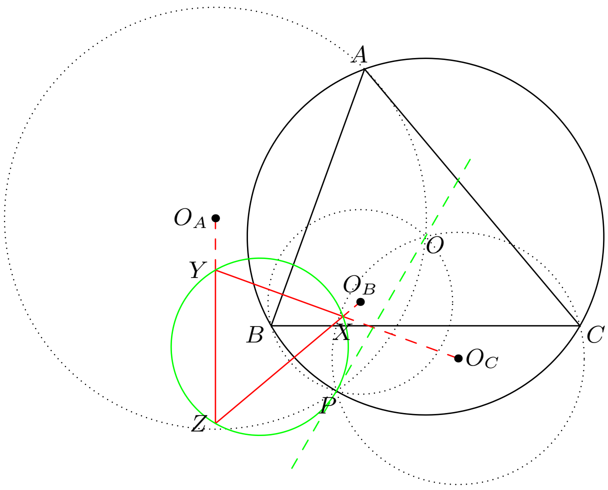
$$\implies \frac{d-e}{d-f}=\frac{(a-b)(t-c)}{(a-c)(t-b)}$$

, que é claramente real.

$\square$

4 IMO Shortlist 2018 - G7

Problema. Sejam O o circuncentro, e Ω o circuncírculo do triângulo acutânguloABC. Seja P um ponto arbitrário de Ω, diferente de A, B, C, e seu santípodas em Ω. Denote os circuncentros dos triângulos AOP, BOP, e COP por O_A, O_B, e O_C, respectivamente. As retas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C perpendicualres a BC, CA, e AB passam por O_A, O_B, e O_C, respectivamente. Prove que o circuncírculo do triângulo formado por ℓ_A, ℓ_B, e ℓ_C é tangente à reta OP.



Solução. Vamos parametrizar do jeito padrão. Se T_A é o antípoda de O_A em (AOP), é fácil ver que T_A é a interseção das tangentes a (ABC) por A e P, ou seja:

$$O_A = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{2ap}{a+p}\right) = \frac{ap}{a+p}$$

Para calcular l_A:

$$\begin{aligned}\frac{z - O_A}{b-c} \in i\mathbb{R} &\iff \frac{z - \frac{ap}{a+p}}{b-c} = -\frac{\overline{z} - \frac{1}{a+p}}{\frac{c-b}{bc}} \\ &\iff z - \frac{ap}{a+p} = bc\overline{z} - \frac{bc}{a+p} \\ &\iff abc\overline{z} = az - \frac{a^2p - abc}{a+p}\end{aligned}$$

Intersectando l_A e l_B para achar Z:

$$\begin{aligned}az - \frac{a^2p - abc}{a+p} = bz - \frac{b^2p - abc}{b+p} \\ &\iff (a-b)z = \frac{(a^2p - abc)(b+p) - (b^2p - abc)(a+p)}{(a+p)(b+p)} \\ &\iff (a-b)z = \frac{(a+b)(a-b)p^2 + ab(a-b)p + abc(a-b)}{(a+p)(b+p)} \\ &\iff z = \frac{(a+b)p^2 + abp + abc}{(a+p)(b+p)}\end{aligned}$$

Na busca por simetrias, multiplicamos o numerador e numerador de z por $(c+p)$:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{((a+b)p^2+abp+abc)(p+c)}{(a+p)(b+p)(c+p)}\\
&= \frac{(a+b)p^3+(ab+bc+ca)p^2+2abcp+abc^2}{(a+p)(b+p)(c+p)}\\
&= \underbrace{p\left(\frac{p^3+(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p+abc}{(a+p)(b+p)(c+p)}\right)}_{1}+\frac{-p^4-cp^3+abcp+abc^2}{(a+p)(b+p)(c+p)}\\
&= \underbrace{p\left(1+\frac{abc-p^3}{(a+p)(b+p)(c+p)}\right)}_{\text{simétrico em } a,b,c}+\underbrace{\left(\frac{abc-p^3}{(a+p)(b+p)(c+p)}\right)}_{\text{simétrico em } a,b,c}c\\
&= r+sc
\end{aligned}$$

Logo, temos que a transformação linear $\phi\colon z \mapsto r+sz$ leva (A,B,C) em (X,Y,Z) e, portanto, leva Ω em (XYZ). Daí, basta mostrar que a reta passando por $\phi^{-1}(O)$ e $\phi^{-1}(P)$ é tangente ao círculo unitário. Como $\phi^{-1}(z)=\frac{z-r}{s}$, temos:

$$\phi^{-1}(O) = -\frac{r}{s} = -p\left(\frac{(a+p)(b+p)(c+p)}{abc-p^3}+1\right)$$

$$\phi^{-1}(P) = -p$$

E a reta passando por esses dois pontos é evidentemente tangente ao círculo unitário, pois $-p$ é um ponto do próprio círculo unitário e $\phi^{-1}(O) = -p+(-p)\cdot\theta$, e é imediato verificar que $\theta \in i\mathbb{R}$.

$\square$

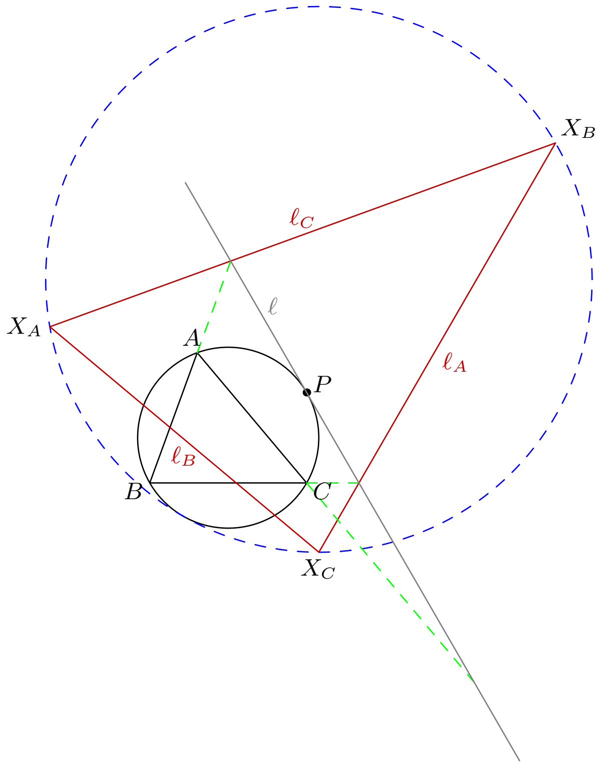
Nota: existem vários jeitos de terminar o problema depois de calcular Z. O que foi escolhido é , em grande parte, para justificar a importância de reconhecer a abstração de transformações geométricas nos problemas. De fato, é possível argumentar que não usamos ou conjecturamos nenhum fato geométrico não trivial.

Por outro lado, uma boa figura e conjecturas sintéticas acabam o problema de forma menos criativa. Após conjecturar que P é o ponto de tangência, bastaria mostrar que o quadrilátero $XYZP$ é cíclico e finalizar com uma igualdade ângulos como $\measuredangle OPX = \measuredangle PYX$.

Outra conjectura possível de uma boa figura é que A, P, X são colineares (e variações simétricas para B e C). É imediato mostrar isso com X calculado, e o problema morre com um arrastão e roto-homotetia.

5 IMO 2011 - P6 / IMO Shortlist 2011 - G8

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo cuja circunferência circunscrita é Γ. Seja ℓ uma reta tangente a Γ e sejam ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c as retas obtidas ao refletir ℓ em relação às retas BC, CA e AB, respectivamente. Demonstre que a circunferência circunscrita ao triângulo determinado pelas retas ℓ_a, ℓ_b e ℓ_c é tangente à circunferência Γ.



Solução. Seja P o ponto de tangência entre ℓ e (ABC). Vamos usar complexos com $(ABCP)$ no círculo unitário, $A = a$ etc.

Seja $X_A = \ell_B \cap \ell_C$, X_B, X_C análogos. Por limpeza de conta, $X_A = x$ no que segue.

Para calcular x, poderíamos calcular as duas retas ℓ_B e ℓ_C e resolver um sistema de equações para intersectá-las. Outra forma, que eu prefiro, é escrever duas equações que reflitam x por AB e AC ℓ, que por definição são pontos de $\ell : z + p^2\overline{z} = 2p$, ou seja:

$$x \in \ell_B \iff (a + c - ac\overline{x}) + p^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{x}{ac}\right) = 2p \iff abc\overline{x} = ab + bc - 2bp + \frac{bp^2}{ac}(a + c - x)$$

Para intersectar com ℓ_C, basta igualar os lados direitos:

$$\begin{aligned}
& ab + \cancel{bc} - 2bp + \frac{bp^2}{ac}(a + c - x) = ac + \cancel{bc} - 2cp + \frac{cp^2}{ab}(a + b - x) \\
\iff & (b - c)(a - 2p) + \frac{p^2}{a}\left(a \cdot \frac{b^2 - c^2}{bc} + b - c\right) = x \cdot \frac{p^2}{a}\left(\frac{b^2 - c^2}{bc}\right) \\
\iff & (a - 2p) + \frac{p^2}{a}\left(a \cdot \frac{b + c}{bc} + 1\right) = x \cdot \frac{p^2(b + c)}{abc} \\
\iff & a^2bc - 2abcp + p^2(ab + bc + ca) = p^2(b + c)x \\
\iff & \boxed{x = \frac{(ab + bc + ca)p^2 - (2abc)p + a^2bc}{(b + c)p^2}}
\end{aligned}$$

x não tem uma cara muito simétrica, infelizmente. Então, assim como fizemos no G7 de 2018, buscamos algum tipo de simetria multiplicando o numerador e o denominador por $(a+b)(a+c) = a^2+(ab+bc+ca)$:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(ab+bc+ca)p^2-(2abc)p+a^2bc}{(b+c)p^2}\cdot\frac{a^2+(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+c)}\\
&= \frac{(ab+bc+ca)^2p^2+a^2(ab+bc+ca)p^2-2abc(ab+bc+ca)p-a^2(2abc)p+a^2b^2c^2+a^2abc(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)p^2}\\
&= \left(\frac{(ab+bc+ca)^2p^2-2abc(ab+bc+ca)p+a^2b^2c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)p^2}\right)+\left(\frac{(ab+bc+ca)p^2-2abcp+abc(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)p}\right)\frac{a^2}{p}
\end{aligned}$$

O que está colorido é simétrico em a, b, c, logo

$$X_A = r + s\frac{a^2}{p}, \quad X_B = r + s\frac{b^2}{p}, \quad X_C = r + s\frac{c^2}{p}$$

A transformação $\phi : z \mapsto r + sz$ é uma roto-homotetia de centro z_0 tal que $\phi(z_0) = z_0 \iff z_0 = \frac{r}{1-s}$. Mais que isso, um olhar atento percebe que, no nosso caso, $s \in \mathbb{R}$, e portanto ϕ é na verdade uma homotetia de centro $\frac{r}{1-s}$.

Assim, basta verificar que esse centro tem módulo 1.

De fato:

$$\begin{aligned}
\frac{r}{1-s} &= \frac{1}{p}\cdot\frac{((ab+bc+ca)p-abc)^2}{-(ab+bc+ca)p^2+(4abc+\sum_{\text{sym}}a^2b)p-abc(a+b+c)}\\
&= \frac{1}{p}\cdot\frac{((ab+bc+ca)p-abc)^2}{((ab+bc+ca)p-abc)(-p+(a+b+c))}\\
&= \frac{(ab+bc+ca)p-abc}{p(a+b+c-p)}
\end{aligned}$$

, que claramente tem módulo 1.

$\square$

6 OBM 2022 - P2

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo, com $AB < AC$. Sejam K o ponto médio do arco BC da circunferência circunscrita a ABC que não contém A e P o ponto médio do lado BC. Os pontos I_B e I_C são os exincentros relativos aos vértices B e C, respectivamente. Seja Q a reflexão de K pelo ponto A. Mostre que P, Q, I_B e I_C estão sobre uma mesma circunferência.

Solução. Vou nem fazer figura.

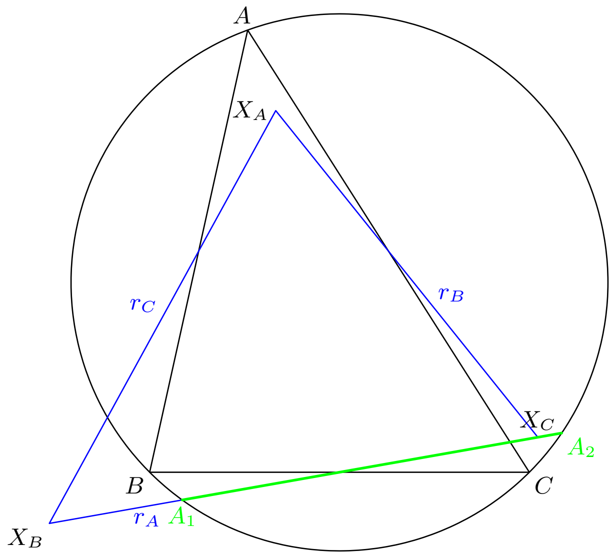
Na parametrização normal de incentro, temos: $I_B = ab + bc - ca$, $I_C = -ab + bc + ca$, $P = \frac{b^2+c^2}{2}$, $Q = 2a^2 + bc$.

$$\begin{aligned}
&\frac{I_B - I_C}{I_B - P} : \frac{Q - I_C}{Q - P} \in \mathbb{R} \\
\iff &\frac{2a(b-c)}{(b-c)\left(a - \frac{b-c}{2}\right)} : \frac{a(2a+b-c)}{2a^2 + bc - \frac{b^2+c^2}{2}} \in \mathbb{R} \\
\iff &\frac{4a^2 - (b-c)^2}{(2a-b+c)(2a+b-c)} \in \mathbb{R} \\
\iff &\frac{(2a+b-c)(2a-b+c)}{(2a-b+c)(2a+b-c)} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

, o que é obviamente verdade. □

7 OBM 2017 - P5

Problema. No triângulo ABC, seja r_A a reta que passa pelo ponto médio de BC e é perpendicular à bissetriz interna de $\angle BAC$. Defina r_B e r_C da mesma forma. Sejam H e I o ortocentro e o incentro de ABC, respectivamente. Suponha que as três retas r_A, r_B, r_C definam um triângulo. Prove que o circuncentro desse triângulo é o ponto médio de HI.



Solução. Parametrização padrão de incentro.

Esse problema é um bom exemplo de como usar Relações de Girard para tornar as contas diretas. Seja $\{A_1, A_2\} = r_A \cap (ABC)$. Não sabemos exatamente quem são A_1 e A_2 (e nem deveríamos, porque uma escolha de configuração é difícil de tratar com complexos), mas sabemos expressar o que há de simétrico em A_1 e A_2, ou seja, o que depende da corda.

De fato, da perpendicularidade com a bissetriz, temos $a_1a_2 = -(a^2(-bc)) \iff a_1a_2 = a^2bc$, e da pertinência de $\frac{b^2+c^2}{2}$ à corda: $a_1 + a_2 = \frac{b^2+c^2}{2} + a_1a_2 \cdot \frac{b^2+c^2}{2b^2c^2} = \frac{b^2+c^2}{2}\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)$

Logo, $X_C = r_A \cap r_B$ é igual a:

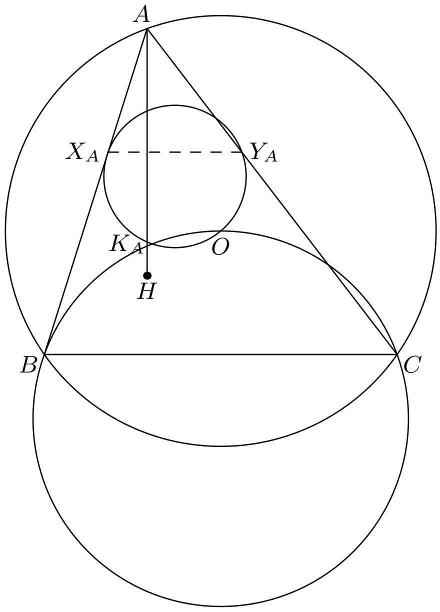
$$\begin{aligned}
\frac{a_1a_2(b_1+b_2) - b_1b_2(a_1+a_2)}{a_1a_2 - b_1b_2} &= \frac{a^2bc\left(\frac{a^2+c^2}{2}\left(\frac{b^2+ac}{ac}\right)\right) - ab^2c\left(\frac{b^2+c^2}{2}\left(\frac{a^2+bc}{bc}\right)\right)}{abc(a-b)} \\
&= \frac{ab(a^2+c^2)(b^2+ac) - ab(b^2+c^2)(a^2+bc)}{2abc(a-b)} \\
&= \frac{ab(a-b)(c^3 - (a+b)c^2 + (a^2+ab+b^2)c)}{2abc(a-b)} \\
&= \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{2} + ab
\end{aligned}$$

Mas $\frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{2}$ é exatamente o ponto médio M de HI. Logo, $MX_C = |ab| = 1$, que é simétrico em a, b, c.

□

8 USA TSTST 2022 - P6

Problema. Sejam O e H o circuncentro e ortocentro, respectivamente, do triângulo acutângulo escaleno ABC. A mediatriz de $\overline{AH}$ intersecta $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em X_A e Y_A respectivamente. Seja K_A a interseção dos circuncírculos dos triângulos OX_AY_A e BOC diferente de O. Defina K_B e K_C analogamente repetindo essa construção mais duas vezes. Prove que K_A, K_B, K_C, e O são concíclicos.



Solução. Parametrização padrão de complexos ((ABC) no círculo unitário, $A = a$ etc.)

Primeiro vamos calcular X_A, Y_A. A corda suporte de X_AY_A é PQ com $PQ \parallel BC$, ou seja, $pq = bc$, e

$$p + q = \frac{2a + b + c}{2} + pq \cdot \frac{2bc + ab + ac}{2abc} = \frac{2a^2 + ab + ac + 2bc + ab + ac}{2a} = \frac{(a + b)(a + c)}{a}$$

Daí:

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{ab(p + q) - pq(a + b)}{ab - pq} \\ &= \frac{b(a + b)(a + c) - bc(a + b)}{ab - bc} \\ &= \frac{(a + b)(ab + bc - bc)}{b(a - c)} \\ \implies x_A &= \frac{a(a + b)}{a - c} \end{aligned}$$

Analogamente, $y_A = \frac{a(a+c)}{a-b}$.

Agora, vamos inverter por (ABC). Essa inversão leva K_A na interseção L_A de $X'_AY'_A$ ($'$ denotando o inverso) com $B'C' = BC$.

$$x'_A = \overline{\frac{1}{x_A}} = \frac{ab(c - a)}{c(a + b)}, \quad y'_A = \frac{ac(b - a)}{b(a + c)}$$

$$\begin{aligned} x'_A - y'_A &= \frac{ab(c - a)}{c(a + b)} - \frac{ac(b - a)}{b(a + c)} \\ &= \frac{ab^2(c^2 - a^2) - ac^2(b^2 - a^2)}{bc(a + b)(a + c)} \\ &= \frac{a^3(c^2 - b^2)}{bc(a + b)(a + c)} \end{aligned}$$

Daí, usando também $\overline{l_A} = \frac{b+c-l_A}{bc}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{l_A - x'_A}{\frac{a^3(c^2-b^2)}{bc(a+b)(a+c)}} \in \mathbb{R} \\
\iff &\frac{l_A - \frac{ab(c-a)}{c(a+b)}}{\frac{a^3(c^2-b^2)}{bc(a+b)(a+c)}} = \frac{\frac{b+c-l_A}{bc} - \frac{a-c}{a(a+b)}}{\frac{a^2b^2c^2(b^2-c^2)}{a^3b^2c^2(a+b)(a+c)}} = \frac{\frac{a-c}{a(a+b)} - \frac{b+c-l_A}{bc}}{\frac{(c^2-b^2)}{a(a+b)(a+c)}} \\
\iff &bc\left(l_A - \frac{ab(c-a)}{c(a+b)}\right) = a^4\left(\frac{a-c}{a(a+b)} - \frac{b+c-l_A}{bc}\right) \\
\overset{\cdot\, abc(a+b)}{\iff} &ab^2c\big(c(a+b)l_A - ab(c-a)\big) = a^4\big(bc(a-c) - a(a+b)(b+c) + a(a+b)l_a\big) \\
\iff &a(a+b)(b^2c^2 - a^4)l_A = a^2\big(b^3c(c-a) + a^2bc(a-c) - a^3(a+b)(b+c)\big) \\
\iff &(a+b)(a^2+bc)(bc-a^2)l_A = a\big((-b-c)a^4 + (-b^2)a^3 + (-bc^2)a^2 + (-b^3c)a + b^3c^2\big) \\
\iff &(a+b)(a^2+bc)(bc-a^2)l_A = a(a+b)\big((-b-c)a^3 + (bc)a^2 + (-b^2c - bc^2)a + b^2c^2\big) \\
\iff &(a^2+bc)(bc-a^2)l_A = a(a^2+bc)\big((-b-c)a + bc\big) \\
\iff &(bc-a^2)l_A = a(-ab-ac+bc)
\end{aligned}$$

$$\implies l_A = \boxed{\frac{a(-ab-ac+bc)}{bc-a^2}}$$

Resta provar que L_A, L_B e L_C são colineares. Para isso, calculemos $l_A - l_B$:

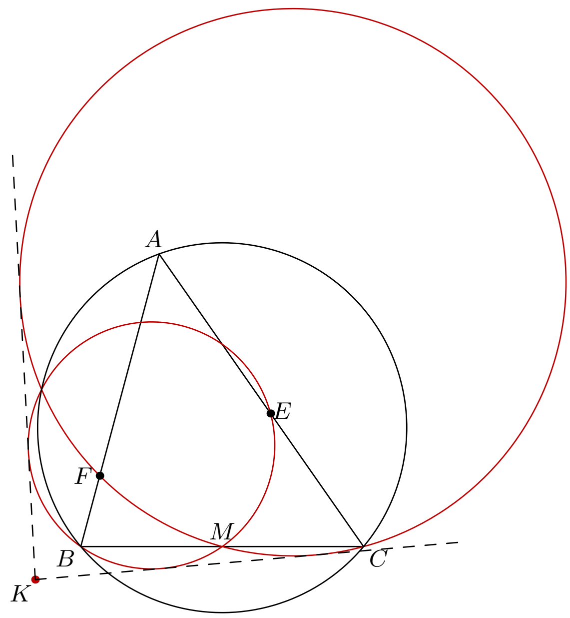
$$\begin{aligned}
l_A - l_B &= \frac{a(-ab-ac+bc)}{bc-a^2} - \frac{b(-ab+ac-bc)}{ac-b^2} \\
&= \frac{(-a^2b - a^2c + abc)(ac-b^2) - (-ab^2 + abc - b^2c)(bc-a^2)}{(ac-b^2)(bc-a^2)} \\
&= \frac{(-a^3bc + a^2b^3 - a^3c^2 + a^2b^2c + a^2bc^2 - ab^3c) - (-ab^3c + a^3b^2 + ab^2c^2 - a^3bc - b^3c^2 + a^2b^2c)}{(ac-b^2)(bc-a^2)} \\
&= \frac{(a-b)(-a^2b^2 - c^2(a^2+ab+b^2) + abc^2)}{(ac-b^2)(bc-a^2)}
\end{aligned}$$

$$\implies l_A - l_B = \frac{(b-a)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{(ac-b^2)(bc-a^2)} \implies \frac{l_A - l_B}{l_A - l_C} = \frac{(b-a)(ab-c^2)}{(c-a)(ac-b^2)}$$

, e é fácil ver que esse último valor é real. $\square$

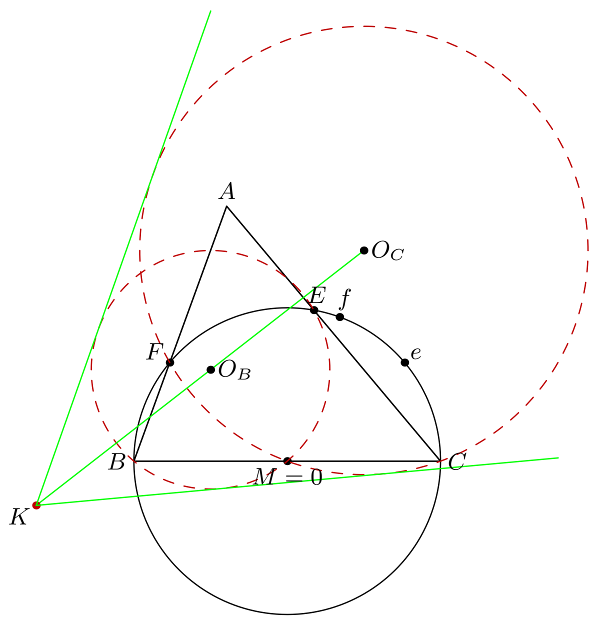
9 USA TST 2023 - P2 / USA EGMO TST 2023 - P3

Problema. Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam M o ponto médio do lado BC, E e F os pés das alturas de B e C, respectivamente. Suponha que as tangentes externas comuns dos circuncírculos de BME e CMF se intersectam K, e que K está sobre o circuncírculo de ABC. Prove que AK é perpendicular a BC.



Solução. A parametrização aqui é um pouco estranha, mas faz bastante sentido.

Note que o A tem um papel periférico no problema, então é razoável pensar numa parametrização em que os círculos (BME) e (CMF) sejam mais nativos. Um jeito de conseguir isso é pondo o círculo de diâmetro (BC) no círculo unitário $(B = -1, C = 1)$, com $E = e^2, F = f^2$ e $0 < \arg e, \arg f < \frac{\pi}{2}$.



$$a = \frac{e^2(f^2-1)+f^2(e^2+1)}{e^2+f^2} = \frac{2e^2f^2-e^2+f^2}{e^2+f^2}$$

Usando ponto médio entre centro e interseção das tangentes, temos

$$o_b = \frac{1}{2}\left(0+\frac{-2e^2}{-1+e^2}\right) = \frac{e^2}{1-e^2}, \quad o_c = \frac{f^2}{1+f^2}$$

Para calcular o ex-similicentro das duas circunferências, precisamos dos raios, r_b e r_c:

$$r_b = |o_b| = \pm\sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}\cdot\frac{1}{e^2-1}} = \pm\frac{ie}{1-e^2}$$

A escolha do sinal deve ser a mesma para qualquer e, pois r_b varia continuamente com e e nunca é zero. Tomando $e \to i$, obtemos $r_b = -\frac{ie}{1-e^2}$. De forma totalmente análoga, ,$r_c = +\frac{f}{1+f^2}$.

Agora podemos calcular k:

$$\begin{aligned}
\frac{k-o_b}{k-o_c} = \frac{r_b}{r_c} \iff k &= \frac{r_b o_c - r_c o_b}{r_b - r_c}\\
&= \frac{\left(-\frac{ie}{1-e^2}\right)\left(\frac{f^2}{1+f^2}\right) - \left(\frac{f}{1+f^2}\right)\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)}{-\frac{ie}{1-e^2} - \frac{f}{1+f^2}}\\
&= \frac{ef(e+if)}{ie+ief^2+f-e^2f}
\end{aligned}$$

$$\boxed{k = \frac{ef(e+if)}{(ef-i)(-e+if)}}$$

Vamos agora escrever as duas condições do problema:

$$\begin{aligned}
AK \perp BC &\iff a-k \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{2e^2f^2-e^2+f^2}{(-e-if)(-e+if)} - \frac{ef(e+if)}{(ef-i)(-e+if)} \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{(2e^2f^2-e^2+f^2)(ef-i) - ef(e+if)(-e-if)}{(ef-i)(-e-if)(-e+if)} \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{(2e^3f^3-2ie^2f^2-e^3f+ie^2+ef^3-if^2)+ef(e^2-f^2+2ief)}{(ef-i)(-e-if)(-e+if)} \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{2e^3f^3-\cancel{2ie^2f^2}-\cancel{e^3f}+ie^2+\cancel{ef^3}-if^2+\cancel{e^3f}-\cancel{ef^3}+\cancel{2ie^2f^2}}{(ef-i)(e+if)(e-if)} \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{2e^3f^3+ie^2-if^2}{(ef-i)(e+if)(e-if)} = -\frac{\frac{2-ief^3+ie^3f}{e^3f^3}}{\frac{(i-ef)(if+e)(if-e)}{i^3e^3f^3}} = i\cdot\frac{2-ief^3+ie^3f}{(ef-i)(e+if)(e-if)}\\
&\iff 2e^3f^3+ie^2-if^2 = 2i+ef^3-e^3f\\
&\iff 2(e^3f^3-i) = (f^2-e^2)(ef+i)\\
&\iff 2\big((ef)^3+i^3\big) = (f^2-e^2)(ef+i)
\end{aligned}$$

$$AK \perp BC \iff \boxed{2(e^2f^2-ief-1) = f^2-e^2} \qquad (\star)$$

Para a outra:

$$
\begin{aligned}
(AKBC) \text{ cíclico} &\iff \frac{\frac{ef(e+if)}{(ef-i)(-e+if)}-1}{\frac{ef(e+if)}{(ef-i)(-e+if)}+1} : \frac{\frac{2e^2f^2-e^2+f^2}{e^2+f^2}-1}{\frac{2e^2f^2-e^2+f^2}{e^2+f^2}+1} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{e^2f+ief^2+(e^2f-ief^2-ie-f)}{e^2f+ief^2-(e^2f-ief^2-ie-f)} : \frac{2e^2(f^2-1)}{2f^2(e^2+1)} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{2e^2f-ie-f}{2ief^2+ie+f} \cdot \frac{f}{e} \cdot \underbrace{\frac{f(e^2+1)}{e(f^2-1)}}_{\in i\mathbb{R}} \in \mathbb{R} \\
&\iff \frac{2e^2f-ie-f}{2ief^2+ie+f} \cdot \frac{f}{e} \in i\mathbb{R} \\
&\iff \frac{2e^2f-ie-f}{2ief^2+ie+f} \cdot \frac{f}{e} = -\frac{\frac{2+ief-e^2}{e^2f}}{\frac{-2i-if^2+ef}{ef^2}} \cdot \frac{e}{f} \\
&\iff \frac{2e^2f-ie-f}{2ief^2+ie+f} = \frac{2e+ie^2f-e^3}{2if+ifs-ef^2} \\
&\iff (2e^2f-ie-f)(2if+if^3-ef^2) = (2ief^2+ie+f)(2e+ie^2f-e^3) \\
&\iff \cancel{4ie^2f^2}+2ie^2f^4-\cancel{2e^3f^3}+\cancel{2ef}+ef^3+\cancel{ie^2f^2}-2if^2-if^4+ef^3 \\
&\quad = \\
&\quad \cancel{4ie^2f^2}-\cancel{2e^3f^3}-2ie^2f^4+2ie^2-e^3f-ie^4+\cancel{2ef}+\cancel{ie^2f^2}-e^3f \\
&\iff (e^2+f^2)\big(2ie^2f^2+2ef-2i+i(e^2-f^2)\big)=0 \\
&\iff 2ie^2f^2+2ef-2i+i(e^2-f^2)=0 \\
&\iff (\star)
\end{aligned}
$$

, como queríamos.

Ufa!

□