Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Uma revisão acerca de grafos de grau limitado com número size-Ramsey grande

Matheus Paulo Ferreira

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Guilherme Oliveira Mota

São Paulo
2024

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Dado um grafo G, podemos pensar em k-colorações de suas arestas, ou seja, em funções $\chi : E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Mais ainda, podemos associar cada k-coloração χ das arestas G com um conjunto de k subgrafos de G, o i-ésimo deles composto pelo conjunto de vértices $V(G)$ e pelas arestas de G que foram coloridas com a cor i por χ. Para o caso $k = 2$, ou seja, de bicolorações, costuma-se chamar uma cor de vermelho e a outra de azul.

A teoria de Ramsey é uma área da combinatória que está interessada em estruturas monocromáticas que aparecem nessas colorações, no caso, no quão grande um grafo deve ser para garantirmos que exista uma cópia monocromática de determinado grafo.

Um resultado clássico dessa área é sobre o problema dos amigos e desconhecidos, no caso, supondo que para cada par de pessoas, são ou são amigos ou desconhecidos, dado um conjunto de 6 pessoas, existem 3 pessoas que são amigas duas a duas ou 3 pessoas que são desconhecidas duas a duas. Traduzindo para a linguagem de grafos, consiste em afirmar que toda bicoloração do K_6 contém uma cópia monocromática de um K_3. Denotamos essa relação dizendo que $K_6 \longrightarrow K_3$. De forma complementar, denotamos por exemplo, que $K_5 \not\longrightarrow K_3$, pois existe uma bicoloração do K_5 que não contém cópias monocromáticas do K_3.

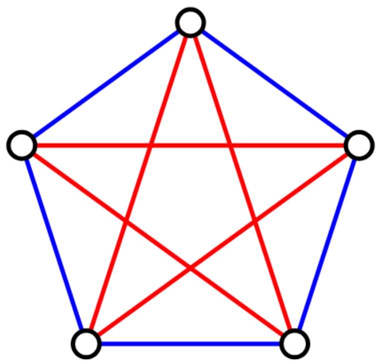

Figura 1.1: *Bicoloração do K_5 que não possui triângulos monocromáticos.*

1.1 Problema size-Ramsey

O número size-Ramsey de um grafo H, denotado por $\hat{r}(H)$, é definido por $\hat{r}(H) = \min(|E(G)| : G \to H)$, ou seja, o número mínimo de arestas que um grafo G precisa ter para ser válido que toda bicoloração de suas arestas contém uma cópia monocromática de H.

Por exemplo, temos que $\hat{r}(K_{1,n}) = 2n - 1$, onde $K_{1,n}$ corresponde a uma estrela de $n + 1$ vértices. Isso pois com $2n - 2$ arestas, podemos pintar $n - 1$ arestas de cada cor, de modo a nunca aparecer uma cópia de $K_{1,n}$, já que ela necessita de ao menos n arestas. Já com $2n - 1$ arestas, podemos considerar um $K_{1,2n-1}$, que possui a quantidade de arestas desejada e para qualquer bicoloração de suas arestas é válido que um dos subgrafos contém ao menos n arestas, contendo uma cópia de $K_{1,n}$.

Esse problema foi abordado por diversos autores ao longo do tempo e diversas conjecturas foram feitas a respeito dele nesse processo. Em especial, para diversas classes simples de grafos H, foi demonstrado que $\hat{r}(H)$ possui limitante superior linear no seu número de vértices. Nesse contexto, J. Beck conjecturou que para todo grafo $H_{n,d}$, com n vértices e grau máximo d, vale que $\hat{r}(H_{n,d}) \leq c(d) \cdot n$, ou seja, $\hat{r}(H_{n,d})$ é linear no número de vértices de $H_{n,d}$.

Assim, criou-se uma motivação para desprovar essa conjectura. Mais ainda, levantou-se a pergunta acerca do quão grande o número size-Ramsey de um grafo de grau limitado pode ser em comparação com o seu número de vértices. Para atingir ambos os objetivos, começou-se uma busca por grafos de grau limitado H tal que $\hat{r}(H)$ não seja linear em relação ao seu número de vértices. Isso significa um grafo H com propriedades que dificultem que grafos G com poucas arestas contenham diversas cópias de H.

Capítulo 2

Intuição

Para mostrar um limitante inferior para o número size-Ramsey de um grafo H com n vértices, devemos mostrar que para todo grafo G com nl arestas ou menos, $G \nrightarrow H$. Nesse caso, teremos que $\hat{r}(H) \geq nl$. Para explorar os limites dessa questão, buscamos encontrar um grafo H tal que l seja o maior possível assintoticamente em função de n, o número de vértices de H. Caso l seja maior que a função constante, concluímos que a conjectura de J. Beck é falsa.

Os dois autores cujas provas serão descritas utilizaram estratégias similares para resolver esse problema, cuja base é a seguinte:

1. Definir o grafo H como sendo a união de diversos padrões $P_1, P_2, \dots, P_q$;
2. Ao considerarmos um grafo G com nl arestas, podemos notar que há poucos vértices com grau alto, e removê-los para gerar um grafo reduzido $\widehat{G}$;
3. Em $\widehat{G}$, algum dos padrões de H só poderá aparecer em poucos lugares, pois $\widehat{G}$ tem grau limitado e poucas arestas;
4. Seja P_{i_0} um padrão que só pode aparecer em poucos lugares em $\widehat{G}$;
5. Então considere a bicoloração de G em que pintamos de vermelho todas as arestas ligadas a vértices de grau alto e algumas arestas de cada possível aparição de P_{i_0}, com as demais arestas do grafo sendo pintadas de azul;
6. Temos que G azul não pode conter H, pois G azul não pode conter P_{i_0}. Temos também que G vermelho é muito pequeno para conter H, logo existe uma bicoloração de G que não contém uma cópia monocromática de H;
7. Assim, para todo G com nl arestas ou menos, existe uma bicoloração de G que não contém uma cópia monocromática de H, implicando que $\hat{r}(H) \geq nl$.

Nos resultados a seguir, podemos ver como os autores utilizaram essas ideias para resolver o problema em questão, e mais ainda, para ver como elas podem ser usadas para encontrar limitantes inferiores ainda melhores.

Capítulo 3

Vojtěch Rödl e Endre Szemerédi

3.1 Contexto

Alguns anos após Beck propor sua conjectura, Vojtěch Rödl e Endre Szemerédi publicaram um artigo Rödl e Szemerédi, 2000 cujo principal objetivo era desprová-la. Assim, os autores se preocuparam principalmente em demonstrar que existe um grafo H de n vértices e grau máximo 3 tal que $\hat{r}(H) \geq nl$, onde l cresce mais rápido que a função constante. Por esse motivo, os autores não se preocuparam em encontrar o maior l possível. De fato, os autores reconhecem no artigo que o limitante encontrado é longe do melhor possível.

3.2 O resultado

Seja B uma árvore binária completa de profundidade t e seja $m = 2^{t-1}$. Seja $L(B)$ o seu conjunto de folhas. Sejam B_1 e B_2 cópias de B, com raizes x_1 e x_2 respectivamente. Seja T a árvore definida por

$$V(T) = V(B_1) \cup V(B_2) \cup \{y_1, y_2\}$$

e

$$E(T) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup \{x_1, y_1\} \cup \{y_1, y_2\} \cup \{x_2, y_2\}.$$

Ou seja, T é uma árvore binária com $2^{t+1} = 4m$ vértices e aresta raiz $\{y_1, y_2\}$. Seja $L(T) = L(B_1) \cup L(B_2)$ o conjunto de todas as folhas de T.

Considere por fim, um ciclo $C \simeq C_{2m}$ de tamanho $2m$ e conjunto de vértices $V(C) = L(T)$.

Nomeados os vértices em $L(T)$, há claramente $\frac{(2m)!}{2m}$ ciclos C possíveis. Sejam eles C_i para $i = 1, 2, \ldots, \frac{(2m)!}{2m}$. Para cada C_i, seja T_{C_i} uma cópia de T e seja P_i um grafo unindo T_{C_i} e C_i.

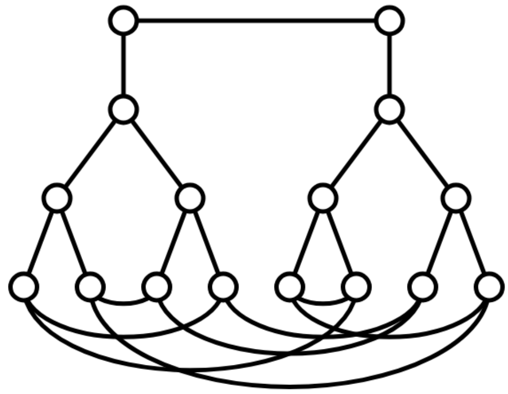

Figura 3.1: *Exemplo de P_i para $t = 2$.*

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto de todos os grafos P_i construídos acima. Podemos definir uma relação de equivalência sobre esse conjunto, tal que para todo par $P_i, P_j \in \mathcal{P}$, temos que $P_i \cong P_j$ se e somente se existir um isomorfismo φ de P_i para P_j. Note que essa operação realmente é uma relação de equivalência, pois é reflexiva, simétrica e transitiva.

Note também que todo isomorfismo φ de P_i para P_j satisfaz a propriedade $\varphi(E(T_{C_i})) = E(T_{C_j})$. Isso porque os únicos vértices de grau 2 em todo $P \in \mathcal{P}$ são y_1 e y_2, o que implica que $\varphi(\{y_1, y_2\}) = \{y_1.y_2\}$. Logo, $\varphi(\{x_1, x_2\}) = \{x_1.x_2\}$, pois ambos não podem ser mapeados para $\{y_1, y_2\}$ e devem ser adjacentes a $\varphi(y_1)$ e $\varphi(y_2)$, respectivamente. De modo similar, todo vértice no próximo nível da árvore deve ser mapeado por φ para um vértice no mesmo nível e que esteja conectado ao vértice a que seu pai na árvore original foi mapeado.

Deste modo, cada isomorfismo de P_i para algum P_j corresponde a um isomorfismo de T_{C_i} para T_{C_j}, ou seja, a um automorfismo de T. Além disso, existem um total de

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^{2^2} \cdot \dots \cdot 2^{2^{t-1}} < 2^{2^t} = 2^{2m}$$

automorfismos de T. Logo, o tamanho máximo de cada classe de equivalência de $\mathcal{P}$ sobre a relação $\cong$ é 2^{2m}. Assim, existem pelo menos

$$\left(\frac{(2m)!}{2m}\right) \cdot (2^{2m})^{-1} = \frac{(2m-1)!}{2^{2m}} > m^m$$

classes de equivalência de $\mathcal{P}$ sobre a relação $\cong$.

Seja $q = \lfloor \frac{n}{4m} \rfloor$ e sem perda de generalidade, seja $\{P_1, P_2, \dots, P_q\}$ um conjunto de grafos não isomorfos dois a dois. Esse conjunto existe desde que $q \leq m^m$. Seja H o grafo definido pela união disjunta desses P_i. Note que H tem no máximo n vértices, grau máximo 3 e grau mínimo 2.

Lema. *Seja G um grafo de no máximo n vértices com grau máximo 3 e grau mínimo 2. Seja $\alpha(G)$ o tamanho do conjunto independente máximo de G. Então $\alpha(G) \leq \frac{3n}{5}$.*

Demonstração. Seja X um conjunto independente de G e $Y = V(G)\backslash X$. Seja K o numero de arestas entre X e Y. Por um lado, $K \geq 2|X|$. Por outro, $K \leq 3|Y| \leq 3(n - |X|)$. Assim, $2|X| \leq 3(n - |X|) \implies |X| \leq \frac{3n}{5}$. Logo, $\alpha(G) \leq \frac{3n}{5}$. □

Pelo lema acima, temos que $\alpha(H) \leq \frac{3n}{5}$.

Seja G um grafo qualquer de nl arestas. Queremos achar um l tal que para todo G com esse número de arestas ou menos, $G \not\twoheadrightarrow H$, ou seja, que existe uma bicoloração das arestas de G tal que H não é subgrafo de nenhum dos subgrafos induzidos por ambas as cores.

Seja $V_{\text{high}} = \{v \in V(G) \,:\, \deg(v) > d\}$. Como $2nl \geq \sum\{\deg(v), v \in V_{\text{high}}\}$, concluímos que

$$|V_{\text{high}}| < \frac{2nl}{d}.$$

Seja $V_{\text{low}} = V(G)\backslash V_{\text{high}}$ e seja $\widehat{G} = G[V_{\text{low}}]$.

Dizemos que uma aresta $e \in E(\widehat{G})$ pode ver um conjunto $S \subset V(\widehat{G})$ de tamanho $2m$ se existir um subgrafo R de $\widehat{G}$ tal que existe um isomorfismo φ de T para R tal que $\varphi(\{y_1, y_2\}) = e$ e $\varphi(L(T)) = S$. Se existir ainda um subgrafo $\widehat{R}$ de $\widehat{G}$ tal que existe um isomorfismo $\hat{\varphi}$ de P_i para R tal que $\hat{\varphi}(\{y_1, y_2\}) = e$ e $\hat{\varphi}(L(T_{C_i})) = S$, dizemos que e pode ver S por i.

Fixada uma aresta $e \in E(\widehat{G})$, como para todo $v \in V(\widehat{G})$, $\deg(v) \leq d$, temos que há no máximo

$$d^2 \binom{d}{2}^{2(1+2+\cdots+2^{t-2})} \leq d^{8m}$$

conjuntos de tamanho $2m$ que podem ser vistos por e. Como há no máximo d^{2m} ciclos C_{2m} gerados por qualquer conjunto $S \subset V(\widehat{G})$ de tamanho $2m$, concluímos que a aresta e pode ver por algum i no máximo

$$d^{8m} d^{2m} = d^{10m}$$

ciclos C_{2m}.

Considere o grafo bipartido auxiliar Γ com conjunto de vértices

$$V(\Gamma) = E(\widehat{G}) \cup \{1, 2, \ldots, q\}.$$

Para $e \in E(\widehat{G})$ e $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, teremos que $\{e, i\} \in E(\Gamma)$ se e somente se existir um ciclo C de tamanho $2m$ em $\widehat{G}$ tal que e possa ver C por i.

Como $\deg_\Gamma(e) \leq d^{10m}$ e $|E(\widehat{G})| \leq nl$, existe um índice i_0 tal que

$$\deg_\Gamma(i_0) \leq \frac{nld^{10m}}{q} \leq 5mld^{10m}.$$

Ou seja, existe um índice $i_0 \in \{1, 2, \dots, q\}$ tal que o conjunto $N_\Gamma(i_0)$ de Γ-vizinhos de i_0 tem cardinalidade menor ou igual a $5mld^{10m}$. Caso esse valor seja pequeno, então existe i_0 tal que em $\widehat{G}$ há apenas poucas arestas que podem ver algum conjunto por i_0, ou seja, há um padrão P_{i_0} que só pode aparecer em poucos lugares em $\widehat{G}$.

Considere a seguinte bicoloração de G: vamos colorir todas as arestas de $N_\Gamma(i_0)$ juntamente com todas as arestas com ao menos um extremo em V_{high} de vermelho. Todas as demais arestas serão azuis. Seja G_{red} o subgrafo de G contendo somente as arestas vermelhas e G_{blue} o subgrafo de G contendo somente as arestas azuis. Queremos que nem G_{blue} nem G_{red} possam ter H como subgrafo.

Todas as arestas que podem ver um ciclo de tamanho $2m$ de $\widehat{G}$ por i_0 foram coloridas de vermelho, logo P_{i_0} e consequentemente H não são subgrafos de G_{blue}.

Dado um grafo K, seja $\tau(K)$ o tamanho da menor cobertura por vértices de K, ou seja, o tamanho do menor conjunto $X \subset V(K)$ tal que toda aresta de K possui ao menos um extremo em X. Note que dado um conjunto independente Y de K, temos que o conjunto $X = V(K) \setminus Y$ é uma cobertura por vértices de K, logo $\tau(K) \geq |V(K)| - \alpha(K)$.

Assim, para o grafo H, temos que $\tau(H) \geq |V(H)| - \alpha(H) \geq n - \frac{3n}{5} \geq \frac{2n}{5}$. Se H for um subgrafo de G_{red}, então toda cobertura por vértices de G_{red} conterá uma cobertura por vértices de H, ou seja, $\tau(G_{\text{red}}) \geq \tau(H) \geq \frac{2n}{5}$.

Uma possível cobertura por vértices de G_{red} consiste em escolher todos os vértices de V_{high} juntamente com um vértice para cada aresta de $N_\Gamma(i_0)$. Assim,

$$\tau(G_{\text{red}}) \leq |V_{\text{high}}| + |N_\Gamma(i_0)| \leq \frac{2nl}{d} + 5mld^{10m}.$$

Caso essa expressão seja menor que $\frac{2n}{5}$, chegamos em uma contradição, implicando que G_{red} não pode conter H, e consequentemente, que para todo grafo G com no máximo nl arestas, existe uma bicoloração tal que H não aparece em nenhum dos dois subgrafos, ou seja $G \not\to H$. Logo, H seria um grafo com $\Delta(H) = 3$ tal que $\hat{r}(H) \geq nl$.

Como queremos maximizar l, queremos minimizar m, ou seja, queremos um m pequeno tal que

$$\frac{n}{4m} \leq m^m \implies n \leq 4mm^m \implies \log(n) \leq \log(4) + \log(m) + m\log(m).$$

Como o termo com maior magnitude é de longe o último, podemos sem grandes perdas tomar um m tal que $m\log(m) \geq \log(n)$.

Note que $m = \log(n)$ satisfaz essa inequação, e que então podemos considerar que $m \leq \log(n)$. Assim devemos ter que:

$$m \geq \frac{\log(n)}{\log(m)} \geq \frac{\log(n)}{\log(\log(n))}.$$

Por outro lado, note que $m = \sqrt{\log(n)}$ não satisfaz a inequação $m\log(m) \geq n$. Logo $m >$

$\sqrt{\log(m)}$ e podemos tornar a inequação $m\log(m) \geq n$ mais restrita da seguinte maneira:

$$m \geq \frac{\log(n)}{\log\left(\sqrt{\log(n)}\right)} = 2\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}.$$

Por isso, como $m = 2^{t-1}$ deve ser uma potência de 2, vamos considerar m tal que

$$2\frac{\log(n)}{\log(\log(n))} \leq m \leq 4\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}.$$

Evidentemente existe um possível valor de m nesse intervalo. Temos também que todo m nesse intervalo satisfaz que $m\log(m) \geq n$ e por fim, que esta é uma solução quase ótima, pois como $m \geq \frac{\log(n)}{\log(\log(n))}$, há no máximo uma potência de 2 válida menor do que m.

Precisamos agora escolher valores para l e d tal que $\frac{2nl}{d} + 5mld^{10m} < \frac{2n}{5}$. Para isso, vamos fazer com que o primeiro seja limitado e qu o ultimo termo seja $o(n)$.

Para o primeiro ser limitado, podemos tomar $d = 10l$, pois dai temos que $\frac{2nl}{d} = \frac{n}{5} < \frac{2n}{5}$.

Para o segundo termo ser $o(n)$, queremos que

$$\begin{aligned}
5mld^{10m} &= o(n) \\
md^{10m+1} &= o(n) \\
\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}2^{10\log(d)\cdot m} &= o(n) \\
\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}n^{\frac{10\log(d)\cdot m}{\log(n)}} &= o(n).
\end{aligned}$$

Para isso ser verdade, basta que o expoente de n seja menor do que 1. Para isso, podemos tomar $d = 2^{\frac{1}{15m}\log(n)}$. Consequentemente, $l = \frac{1}{10}2^{\frac{1}{15m}\log(n)} = \frac{1}{10}n^{\frac{1}{15m}}$. Observe que

$$n^{\frac{1}{15m}} \geq 2^{\frac{\log(\log(n))}{60\log(n)}\log(n)} \geq (\log(n))^{\frac{1}{60}}.$$

Assim, concluímos a prova de um limitante inferior não linear para o número size-Ramsey de um grafo de grau limitado, no caso:

$$\hat{r}(H) \geq nl \geq \frac{1}{10}n(\log(n))^{\frac{1}{60}}.$$

Capítulo 4

Konstantin Tikhomirov

4.1 Contexto

A publicação de Vojtěch Rödl e Endre Szemerédi motivou ainda mais a busca por resultados assintoticamente mais fortes. Nos anos que se passaram, apesar de algum progresso ter sido feito nos limitantes superiores para números size-Ramsey, nenhum progresso havia sido realizado acerta dos limitantes inferiores, sendo que o limite alcançado pelos autores acima originalmente continuava sendo o melhor conhecido, até que em 2023, Konstantin Tikhomirov publicou o resultado a seguir Tikhomirov, 2023, melhorando o resultado anterior.

4.2 O resultado

Seja T uma árvore binária completa enraizada de profundidade t e seja $L(T)$ o seu conjunto de folhas. Seja C um ciclo gerador em $L(T)$. Seja P um grafo formato pelo conjunto de vértices $V(T)$ e pelas arestas $E(T) \cup E(C)$. Vamos considerar também que a raiz de T é a raiz de P. Existem diversos grafos P possíveis, pois existem diversos ciclos possíveis.

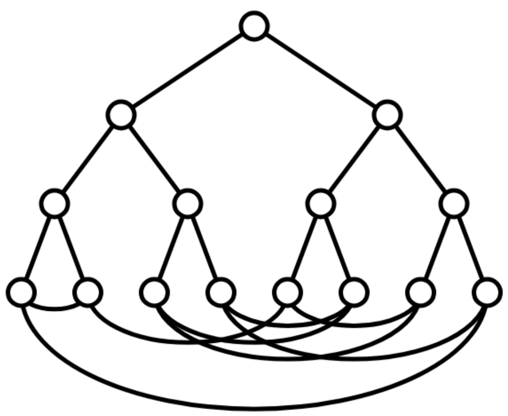

Figura 4.1: *Exemplo de P para $t = 2$.*

Queremos mostrar que existe algum grafo H composto por diversos subgrafos da forma P tal que dado um grafo esparso e de grau limitado $\widehat{G}$, algum dos padrões que compõem H só possa aparecer em poucos lugares. Para isso, vamos utilizar o método probabilístico, ou seja, considerar um grafo H' formado por um conjunto aleatório de padrões, e mostrar que com probabilidade positiva, H' possui uma propriedade desejável que implique alguma restrição na aparição de padrões em $\widehat{G}$. Nesse caso, existe alguma instância H de H' que possui essa propriedade. No caso, a propriedade utilizada se baseia na ideia de que em um grafo de grau limitado, um mesmo vértice não pode ser raiz de muitos padrões distintos, devido à limitação de grau e de quantidade de arestas.

Dado que cada grafo P corresponde a um ciclo gerador C de $L(T)$, podemos nomeá-los e escolher uma instância entre eles randomicamente. Assim, seja H' o grafo formado pela união disjunta em vértices de q instâncias $P_1, P_2, \dots, P_q$ uniformemente escolhidas de maneira independente de grafos da forma P.

Seja $\widehat{G}$ um grafo de grau máximo d. Seja v um vértice qualquer de $\widehat{G}$. Dado um P_i, dizemos que v vê P_i se e somente se existir um isomorfismo entre P_i e um subgrafo de $\widehat{G}$ que mapeie a raiz de P_i para v. Queremos calcular a probabilidade de v ver P_i, para um P_i gerado de modo aleatório.

Dado um isomorfismo ϕ entre T e um subgrafo de $\widehat{G}$ que mapeie a raiz de T para v, esse isomorfismo pode ser estendido para um entre P_i e um subgrafo de $\widehat{G}$ com probabilidade de no máximo

$$\prod_{l=1}^{2^t-1} \frac{d}{l} = \frac{d^{2^t-1}}{(2^t-1)!}.$$

Isso decorre da seguinte geração aleatória de um ciclo gerador de $L(T)$: fixado um vértice v_0 de $L(T)$, v_1 pode ser escolhido aleatoriamente no conjunto $L(T)\backslash\{v_0\}$, v_2 pode ser escolhido aleatoriamente no conjunto $L(T)\backslash\{v_0, v_1\}$, e assim por diante. No fim, podemos tomar o ciclo gerador aleatório formado pelas arestas $\{v_i v_{(i+1) \mod |L(T)|}\}$ para todo i tal que $0 \leq i \leq |L(T)| - 1$. Dadas quaisquer escolhas para $v_1, v_2, \dots, v_i$, a probabilidade de ser escolhido um v_{i+1} tal que $\phi(v_i)$ e $\phi(v_{i+1})$ sejam adjacentes em $\widehat{G}$ é $\frac{d}{2^t-1-i}$, pois do conjunto $L(T)\backslash\{v_0, v_1, \dots, v_i\}$ no máximo d são mapeados a um vértice de $\widehat{G}$ adjacente a $\phi(v_i)$.

Como $\widehat{G}$ tem grau máximo d, o número máximo de isomorfismos de T para um subgrafo de $\widehat{G}$ é

$$N \leq d^{2^1+2^2+\dots+2^t} \leq d^{2^{t+1}}.$$

Isso pois uma vez mapeada a raiz de t para v, temos no máximo d escolhas para cada um dos próximos vértices de modo que se mantenham as relações de adjacência.

Assim, concluímos que v ver P_i, para um P_i qualquer é de no máximo $\frac{d^{2^t-1} d^{2^{t+1}}}{(2^t-1)!}$.

Considere agora $r \leq q$, $d \geq 1$ e um conjunto $S = \{P_{i_1}, \dots P_{i_r}\}$. Vamos calcular a probabilidade de existir um grafo $\widehat{G}$ de grau máximo d com um vértice v tal que v vê P_{i_j} para todo subgrafo P_{i_j} do conjunto S. Chamaremos esse evento de $\mathcal{E}_S$, logo queremos calcular $\mathbb{P}(\mathcal{E}_S)$.

Em um grafo de grau máximo d, qualquer bola de raio t contém no máximo $1 + d + d^2 + \cdots + d^t \leq d^{t+1}$ vértices. Assim, se existir um grafo $\widehat{G}'$ que satisfaça a propriedade que desejamos, podemos considerar o grafo $\widehat{G}$ correspondente à bola de raio t centrada em v em $\widehat{G}'$ e teremos que $\widehat{G}$ também satisfaz a propriedade e que $\widehat{G}$ tem no máximo d^{t+1} vértices. Assim, podemos considerar somente grafos de d^{t+1} vértices. Nesse caso, como poderíamos para cada um dos d^{t+1} vértices escolhermos os seus d vizinhos livremente entre os d^{t+1} vértices, concluímos o número máximo de grafos de d^{t+1} vértices de grau máximo d é

$$(d^{t+1})^{d \cdot d^{t+1}}.$$

Com isso, temos que a probabilidade $\mathbb{P}(\mathcal{E}_S)$ de existir um grafo $\widehat{G}$ de grau máximo d com um vértice v que veja todo subgrafo P_{i_j} do conjunto S é de no máximo

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_S) = \left(\frac{d^{2^t-1}d^{2^{t+1}}}{(2^t-1)!}\right)^r (d^{t+1})^{d \cdot d^{t+1}}.$$

Finalmente, queremos mostrar que com probabilidade positiva, não existe um grafo $\widehat{G}$ de grau máximo d que possua um vértice $v \in V(\widehat{G})$ que veja r padrões distintos de H', ou seja, que para todo vértice v de $\widehat{G}$ e para todo r-conjunto $S' = \{P_{i_1}, \ldots P_{i_r}\}$, existe um P_{i_j} tal que v não vê P_{i_j}. Seja $\mathcal{E}$ esse evento, logo queremos mostrar que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) > 0$. Note também que $\mathcal{E}$ é a intersecção dos complementos $\mathcal{E}_S^c$, para todo r-conjunto S de $\{1, 2, \ldots, h\}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_S \mathcal{E}_S^c\right) &\geq 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_S \mathcal{E}_S\right) \geq 1 - \sum_S \mathbb{P}(\mathcal{E}_S) \\
&\geq 1 - \binom{q}{r}\left(\frac{d^{2^t-1}d^{2^{t+1}}}{(2^t-1)!}\right)^r (d^{t+1})^{d \cdot d^{t+1}} \\
&\geq 1 - \binom{q}{r}\left(\frac{d^{2^t-1}d^{2^{t+1}}}{(2^t-1)!}\right)^r (d^{t+1})^{d \cdot d^{t+1}}.
\end{aligned}$$

Se H' com n vértices é a união de q padrões, cada um com 2^{t+1} vértices, temos que $n = q \cdot 2^{t+1} \implies q = \frac{n}{2^{t+1}}$. Além disso, o autor toma $d = \lfloor \exp(\sqrt{\log(n)}/100) \rfloor$, $t = \lfloor \sqrt{\log(n)}/10 \rfloor$ e $r = d \cdot d^{t+1}$. Assim temos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \geq 1 - \binom{q}{r}\left(\frac{d^{t+1}d^{2^t-1}d^{2^{t+1}}}{(2^t-1)!}\right)^r.$$

Como também é válido que $\binom{h}{r} < \left(\frac{eh}{r}\right)^r$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}) &\geq 1 - \left(\frac{e \cdot q \cdot d^{t+1} \cdot d^{2^t-1} \cdot d^{2^{t+1}}}{r(2^t-1)!}\right)^r \\
&\geq 1 - \left(\frac{e \cdot q \cdot d^{t+1} \cdot d^{2^t-1} \cdot d^{2^{t+1}}}{d \cdot d^{t+1}(2^t-1)!}\right)^r \\
&\geq 1 - \left(\frac{e \cdot q \cdot d^{2^t-1} \cdot d^{2^{t+1}}}{d(2^t-1)!}\right)^r
\end{aligned}$$

Pela aproximação de Stirling para o fatorial de um número, temos que:

$$n! < \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Logo, temos que:

$$(2^t-1)! < \sqrt{2\pi(2^t-1)}\left(\frac{2^t-1}{e}\right)^{2^t-1} e^{\frac{1}{12(2^t-1)}}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{E}) &> 1 - \left(\frac{n \cdot \exp\left(\frac{t}{10}(2^t - 1 + 2^{t+1}) + 2^t - \frac{1}{12(2^t-1)}\right)}{2^{t+1} \cdot d\sqrt{2\pi(2^t-1)}(2^t-1)^{2^t-1}}\right)^r \\
&> 1 - \left(\frac{n \cdot \exp\left(\frac{t}{10}(2^{t+2} + 2^t)\right)}{2^{t+1} \cdot d\sqrt{2\pi(2^t-1)}(2^t-1)^{2^t-1}}\right)^r \\
&> 1 - \left(\frac{2^{100t^2} \cdot \exp\left(\frac{t}{10}(4 \cdot 2^t + 2^t)\right)}{(2^t-1)^{2^t-1}}\right)^r \\
&> 1 - \left(2^{\log\left(2^{100t^2}\exp\left(\frac{t \cdot 2^t}{10}(4+1)\right)\right) - \log\left((2^t-1)^{2^t-1}\right)}\right)^r \\
&> 1 - \left(2^{100t^2 + t2^{t-1}\log(e) - (2^t-1)\log\left(2^t-1\right)}\right)^r \\
&> 1 - \left(2^{(100t^2+t+2^t+1) - t2^{t-1}(2-\log(e))}\right)^r.
\end{aligned}$$

Para t suficientemente grande, temos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) > 0.$$

Como concluímos que $\mathbb{P}(\mathcal{E}) > 0$, sabemos que existe um grafo H para que ele ocorre, ou seja, existe um grafo H, composto por q padrões $P_1, P_2, \ldots, P_q$, tal que dado um subconjunto de tamanho r desses padrões, não existe grafo de grau máximo d com um vértice v que possa ver todos esses padrões. Assim, em um grafo $\widehat{G}$ com grau máximo d, todo vértice pode ver no máximo $r-1$ padrões de H.

Com H definido, podemos começar a prova de um limitante inferior para $\hat{r}(H)$. Seja G um grafo qualquer com no máximo nl arestas. O autor toma $l = \lfloor \exp(\sqrt{\log(n)}/1000) \rfloor$. Seja V_{high} o conjunto de vértices com grau maior que d e seja $\widehat{G}$ o grafo obtido ao retirarmos os vértices V_{high} de G. Note que o grau máximo de $\widehat{G}$ é d.

Como $\widehat{G}$ possui no máximo $2nl$ vértices não isolados (2 para cada aresta) e cada vértice vê no máximo r padrões de H, concluímos que existe um padrão P_{i_0} tal que o conjunto V_{i_0} dos vértices de $\widehat{G}$ que veem P_{i_0} tem tamanho de no máximo $2nlr/q$.

Então, considere a seguinte bicoloração das arestas de G: vamos colorir todas as arestas conectadas a um vértice de V_{high} ou a um vértice de V_{i_0} de vermelho, e as demais de azul. Note que o subgrafo G_{blue} não pode conter uma cópia de H, pois não contém uma cópia de P_{i_0}. Nos resta examinar o subgrafo G_{red}, se ele não puder conter cópia de H também, temos que existe uma bicoloração de G que não contém cópia de H em nenhum dos dois subgrafos, para todo G com nl arestas, logo $\hat{r}(H) \geq nl$.

Por contradição, vamos supor que G_{red} contém uma cópia de H e seja $\phi : H \to G_{\text{red}}$ um isomorfismo de H para a sua cópia. Todas as arestas E_{low} de $E(G_{\text{red}})$ que não são adjacentes a dois vértices de V_{high} são adjacentes a ao menos um vértice de V_{i_0}, que tem grau no máximo d em G, e portanto:

$$
\begin{aligned}
|E_{\text{low}}| &\leq d \cdot 2nlr/q \leq 4dlr2^{t+1} \\
&\leq 4\exp((t+3)\sqrt{\log(n)}/100 + \sqrt{\log(n)}/1000)2^{t+1} \\
&\leq 4\exp(2t\sqrt{\log(n)}/100)2^{t+1} \\
&\leq 4\exp(\log(n)/500)2^{t+1} \\
&\leq 4n^{\log(e)/500}2^{t+1} \\
&\leq \frac{n}{2^{t+2}}(n^{\log(e)/500-1}2^{2t+5}) \\
&\leq \frac{q}{2}(2^{\log n(\log(e)/500-1)+2t+5)}) \\
&\leq \frac{q}{2}(2^{100t^2(\log(e)/500-1)+2t+5)}).
\end{aligned}
$$

Para n suficientemente grande:

$$|E_{\text{low}}| < \frac{q}{2}.$$

Seja $I \subset \{1, 2, \ldots, q\}$ um subconjunto de todos os índices i tal que $\phi(P_i)$ contém uma aresta de E_{low}. Então, pelo resultado acima, temos que:

$$|I| < \frac{q}{2}.$$

Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, q\} \backslash I$, o conjunto de arestas do grafo $\phi(P_i)$ é composto completamente por arestas entre vértices de V_{high}. Então, todos os vértices de $\phi(P_i)$ tem grau de pelo menos $d + 1$ em G. Assim, o número total de vértices V_{high} com grau de pelo menos $d+1$ em G é de:

$$|V_{\text{high}}| \geq (q - |I|) \cdot 2^t \geq \frac{q}{2} \cdot 2^t.$$

Por outro lado, temos que o número de vértices em V_{high} é no máximo:

$$|V_{\text{high}}| \leq \frac{2nl}{d}.$$

Juntando as duas inequações, chegamos em:

$$\frac{q}{2} \cdot 2^t \leq \frac{2nl}{d} \Leftrightarrow \frac{n}{2 \cdot 2^{t+1}} \cdot 2^t \leq \frac{2nl}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{2l}{d}.$$

Como $l = \lfloor \exp(\sqrt{\log(n)}/1000) \rfloor$ e $d = \lfloor \exp(\sqrt{\log(n)}/100) \rfloor$, a última desigualdade é falsa, completando a contradição. Isso implica que existe um grafo H de n vértices e grau máximo 3 tal que $\hat{r}(H) \geq n \exp(\sqrt{\log(n)}/1000)$.

Capítulo 5

Conclusão

Ao longo deste artigo, definimos o número size-Ramsey de um grafo e exibimos o porquê da busca por grafos de grau limitado com número size-Ramsey grande. Em seguida, explicamos duas publicações acerca desse problema, sendo uma delas bem recente.

Para facilitar a compreensão, fizemos um esboço da ideia que guia ambas as provas, além de esclarecer as contas, que eram apresentadas de maneira sucinta nas publicações originais.

Referências

[Rödl e Szemerédi 2000] Vojtěch Rödl e Endre Szemerédi. "On size ramsey numbers of graphs with bounded degree". *Combinatorica* 20.2 (2000), pp. 257–262. issn: 1439-6912. doi: 10.1007/s004930070024 (citado na pg. 5).

[Tikhomirov 2023] Konstantin Tikhomirov. "On bounded degree graphs with large size-ramsey numbers". 2023. arXiv: 2210.05818 [math.CO] (citado na pg. 11).