

**MAC 338 – Análise de Algoritmos**  
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2008  
Primeira Prova – 10 de abril

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

No. USP: \_\_\_\_\_ Professor: \_\_\_\_\_

### Instruções

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. A legibilidade também faz parte da nota!
4. A prova consta de 4 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
5. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
6. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questão mas especifique qual é a resposta e qual é o rascunho.
7. A prova é sem consulta.

**Não escrever nesta parte da folha**

Questão	Nota	Observação
1		
2		
3		
4		
Total		

**Boa Sorte !**

1. [2,0 pontos]

Mostre que  $\sum_{i=1}^n i^2 = \Theta(n^3)$ .

2. [2,5 pontos]

Considere a seguinte função recursiva:

```
1  f(n) {  
2    if n > 1 {  
3      f([n/2]);  
4      posprocessa(n);  
5    }  
6  }
```

Suponha que a função  $\text{posprocessa}(n)$  consuma tempo  $\Theta(n)$ . Escreva uma recorrência para o tempo  $T(n)$  consumido pela chamada  $f(n)$ . Resolva a recorrência, deduzindo a ordem de crescimento da função  $T(n)$ . Justifique a sua resposta.

3. [3,0 pontos]

Suponha que temos  $k$  vetores ordenados, cada um com  $n$  elementos, e que se queira combiná-los num vetor único ordenado com os  $kn$  elementos.

- (a) Aqui está uma estratégia: usando o INTERCALA, intercalamos os dois primeiros vetores, e então o resultado com o terceiro, e o resultado seguinte com o quarto, e assim por diante. Escreva essa estratégia em pseudocódigo e analise-a concluindo qual é a sua complexidade no pior caso. (Quanto mais precisa for a sua resposta em termos assintótico, melhor. Note que a complexidade será dependente de  $n$  e de  $k$ .)
- (b) Dê uma solução mais eficiente para este problema, usando divisão e conquista. Escreva o seu algoritmo em pseudocódigo e analise-o. Compare com a complexidade do algoritmo anterior e comente.

**Obs:** Quanto mais precisas forem as suas respostas em termos assintóticos, melhor. Note que a complexidade dos algoritmos serão naturalmente dependente de  $n$  e de  $k$ . Você não precisa escrever o código do INTERCALA. Lembre-se apenas do seu protótipo e descrição:

INTERCALA ( $A, p, q, r$ )

Dados  $A[p..q]$  e  $A[q + 1..r]$  crescentes, rearranjar  $A[p..r]$  de modo que ele fique em ordem crescente.

4. [2,5 pontos]

Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor  $v[1..n]$  com  $n \geq 2$  números positivos distintos.

**Algoritmo** Máximo ( $v, n$ )

1.  $maior \leftarrow 0$
2.  $segundo\_maior \leftarrow 0$
3. **para**  $i \leftarrow 1$  **até**  $n$  **faça**
4.   **se**  $v[i] > maior$
5.     **então**  $segundo\_maior \leftarrow maior$
6.      $maior \leftarrow v[i]$
7.   **senão se**  $v[i] > segundo\_maior$
8.     **então**  $segundo\_maior \leftarrow v[i]$
9. **devolva**  $segundo\_maior$

Suponha que  $v$  é uma permutação de 1 a  $n$  escolhida ao acaso dentre todas as permutações de 1 a  $n$ , de acordo com a distribuição uniforme de probabilidade. Seja  $X$  o número de vezes que a variável  $segundo\_maior$  é alterada (ou seja, o número de execuções das linhas 5 e 8 do algoritmo) numa chamada de Máximo( $v, n$ ). Note que  $X$  é uma variável aleatória. Calcule o valor esperado de  $X$ . Deduza depois a ordem de crescimento de  $E[X]$  em função de  $n$ .