MAC 338 – Anáise de Algoritmos
PRIMEIRO SEMESTRE DE 2011
Primeira Prova – 1 de abril

Nome do aluno: ____ **Curso**: ______________

Assinatura: ____

No. USP: _________________________ **Professor**: ___________________________________

Instruções

1. Não destaque as folhas deste caderno.
2. A prova pode ser feita a lápis.
3. A legibilidade também faz parte da nota!
4. A prova consta de 5 questões. Verifique antes de começar a prova se o seu caderno de questões está completo.
5. Não é permitido o uso de folhas avulsas para rascunho.
6. Não é necessário apagar rascunhos no caderno de questão mas especifique qual é a resposta e qual é o rascunho.
7. A prova é sem consulta.

Não escrever nesta parte da folha

Questão	Nota	Observação
1		
2		
3		
4		
5		
Total		

Boa prova!

1. [1,5 pontos]

   (a) É verdade que $n^2 = \mathrm{O}(2^n)$? Prove.

   (b) Prove que $n^2 - 3n - 18 = \Omega(n)$.

   (c) Prove que $2n^2 - 3n + 10 = \mathrm{O}(n^2)$.

2. [2,0 pontos]
   De que ordem $\Theta(\cdot)$ é a solução da recorrência

$$T(n) \;=\; 16\,T\Big(\frac{n}{4}\Big) + \Theta(n^2)?$$

   Justifique a sua resposta resolvendo a versão simplificada desta recorrência, e concluindo a resposta. Apresente a dedução do chute de solução (por expansão ou árvore) e a prova por indução.

3. [2,5 pontos]
   Escreva um algoritmo que busca um valor x em uma matriz $A_{n \times n}$ cujas linhas e colunas estão ordenadas em ordem não-decrescente. Seu algoritmo deve consumir tempo $\mathrm{o}(n^2)$. Explique porque seu algoritmo está correto, e analise seu consumo de tempo, concluindo que é $\mathrm{o}(n^2)$.

4. [2,5 pontos]
Considere a seqüência de vetores $A_k[1\,..\,2^k], A_{k-1}[1\,..\,2^{k-1}], \ldots, A_1[1\,..\,2^1], A_0[1\,..\,2^0]$. Suponha que cada um dos vetores é crescente. Queremos reunir, por meio de sucessivas operações de intercalação (= *merge*), o conteúdo dos vetores $A_0, \ldots, A_k$ em um único vetor crescente $B[1\,..\,n]$, onde $n = 2^{k+1} - 1$. Escreva um algoritmo que faça isso em $\mathrm{O}(n)$ unidades de tempo. Use como subrotina o INTERCALE visto em aula.

5. [1,5 pontos]
Considere o seguinte algoritmo que calcula o maior e o menor elemento de um vetor $v[1\,..\,n]$ com elementos distintos.

Algoritmo MaiorMenor (v, n)

1. *maior* $\leftarrow v[1]$
2. *menor* $\leftarrow v[1]$
3. **para** $i \leftarrow 2$ **até** n **faça**
4.   **se** $v[i] >$ *maior*
5.   **então** *maior* $\leftarrow v[i]$
6.   **senão se** $v[i] <$ *menor*
7.   **então** *menor* $\leftarrow v[i]$
8. **devolva** *maior*, *menor*

Suponha que v é uma permutação de 1 a n escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a n. Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo? Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo? Justifique suas afirmações.