Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Bacharelado em Ciência da Computação

Emparelhamentos estáveis em grafos de preferências

Thiago Estrela Montenegro

Monografia Final

mac 499 — Trabalho de Formatura Supervisionado

Supervisor: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ferreira

São Paulo
20 de novembro de 2019

Resumo

Thiago Estrela Montenegro. **Emparelhamentos estáveis em grafos de preferências**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Emparelhamentos em grafos é um tema muito abordado em ciência da computação, sobretudo pela sua riqueza em modelar uma grande variedade de problemas de natureza prática. Quando consideramos que cada vértice ordena os seus vizinhos segundo uma ordem de preferência, dá-se origem ao conceito de um grafo de preferências. Nesse pano de fundo, em vários problemas, emparelhamentos com a propriedade que existam dois vértices que prefiram a si próprios do que os seus parceiros são indesejáveis, já que eles seriam instáveis em um certo sentido. Assim, surge o conceito de emparelhamento estável, que é um emparelhamento que não apresenta essa propriedade. O presente trabalho consiste de um estudo de natureza algorítmica e matemática da classe dos emparelhamentos estáveis. No primeiro capítulo, nos restringimos a grafo de preferências bipartidos. Nele, descrevemos o algoritmo de Gale-Shapley que em tempo linear encontra um emparelhamento estável e, além disso, abordamos outros conceitos que julgamos essenciais. No capítulo seguinte, abordamos o algoritmo de Irving que decide, em tempo linear, a existência de um emparelhamento estável e devolve um em caso positivo.

Palavras-chave: emparelhamentos estáveis, grafos de preferências, Gale-Shapley, Irving.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A motivação para o presente trabalho advém dos dois seguintes problemas.

1. **O Problema do Casamento Estável**. O problema consiste em parear cada um de n homens com cada uma de n mulheres de modo que não haja um homem e uma mulher que preferem um ao outro do que os seus parceiros. Posteriormente, veremos que esse problema pode ser visto como o de achar um emparelhamento estável em um grafo de preferências bipartido. Gale e Shapley [4] provaram que esse problema sempre possui solução e descreveram um algoritmo que o resolve. Tal algoritmo passou a ser conhecido por algoritmo de Gale-Shapley.

2. **O Problema dos Colegas de Quarto**. Temos n quartos e $2n$ pessoas. Cada quarto acomoda no máximo 2 pessoas. O Problema consiste em acomodar as $2n$ pessoas nesses n quartos de modo que não existam duas pessoas acomodadas em quartos diferentes que prefiram um ao outro aos seus parceiros. Tal problema pode ser encarado como o de achar um emparelhamento estável em um grafo de preferências arbitrário. Diferente do caso do problema anterior, tal emparelhamento nem sempre existe. Irving [5] formulou um algoritmo que determina a existência de um emparelhamento estável e, caso exista, devolve um.

Apesar de, a primeira vista, parecerem modelar problemas muito específicos, tais problemas modelam muitas outras situações de natureza prática. Dentre elas, podemos citar: processos seletivos de admissão à universidades, seleção de residentes por hospitais e alocação de doadores de órgãos a pacientes necessitando de um transplante.

Além da riqueza de aplicações práticas, há algoritmos lineares para resolução de ambos os problemas que, embora sofisticados, se utilizam de conceitos elementares normalmente encontrados no currículo de uma graduação em Ciência da Computação. Isso torna o presente material uma ótima oportunidade para graduandos testarem e aprofundarem os seus conhecimentos na área de Algoritmos.

O presente trabalho consiste de um estudo de natureza puramente matemática. Buscou-se definir os conceitos matemáticos e terminologias na medida em que são necessários.

Isso evita sobrecarregar o início do texto com conteúdo que, muitas vezes, só seria referido num momento bem posterior.

No primeiro capítulo, introduzimos os conceitos de grafo de preferências e de emparelhamento estável. Em seguida, descrevemos o chamado algoritmo de Gale-Shapley que dado um grafo de preferências bipartido, devolve um emparelhamento estável e, prosseguimos, provando sua corretude e analisando o seu consumo de tempo. Na seção seguinte, provamos que o emparelhamento devolvido pelo algoritmo possui algumas propriedades especiais e, aproveitamos, para descrever uma versão "estendida"do algoritmo de Gale-Shapley. Posteriormente, provamos de modo rigoroso um resultado importante para área, o teorema dos hospitais rurais. Encerramos o capítulo, provando que o conjunto dos emparelhamentos estáveis de um grafo de preferências forma um reticulado distributivo.

No segundo capítulo, estamos interessados em resolver o problema de encontrar um emparelhamento estável em um grafo de preferências arbitrário (não necessariamente bipartido). Mostramos que, diferentemente do caso bipartido, existem instâncias que não apresentam emparelhamentos estáveis. Prosseguimos descrevendo o chamado algoritmo de Irving, que decide em tempo linear se um grafo de preferências apresenta um emparelhamento (e devolve um, em caso positivo). Encerramos o capítulo, providenciando uma prova completa e detalhada de sua corretude.

1.2 Noções preliminares

1.2.1 Convenções

- $A \setminus B$ refere-se ao conjunto $\{x \in A \,:\, x \notin B\}$.
- $A \times B$ é o produto cartesiano de A por B.
- $|A|$ é a cardinalidade do conjunto A.
- Um k-conjunto é um conjunto de cardinalidade k. Similarmente, um k-subconjunto de um conjunto A é um subconjunto de A de cardinalidade k.

1.2.2 Teoria dos Grafos

Esta seção contém o pré-requisito essencial de Teoria dos Grafos para o entendimento do presente texto. Para os leitores em busca de uma referência mais completa, recomenda-se [1].

Um **grafo** (não-direcionado) é um par ordenado $G = (V, E)$ onde $V(G) := V$ é um conjunto não-vazio enumerável e $E(G) := E$ é um conjunto cujos elementos são 2-subconjuntos de V. Os elementos de V são denominados de **vértices** e os elementos de E são chamados de **arestas**.

Seja $e = \{a, b\}$ uma aresta de um grafo G. Denotamos e por ab $(= ba)$. Nesse caso, dizemos que a e b são extremos de e e que a e b são vértices **adjacentes** ou **vizinhos**.

Um **grafo direcionado** é um par ordenado $G = (V, E)$ onde $V(G) := V$ é um conjunto não-vazio enumerável e $E(G) := E$ é um conjunto de pares ordenados de elementos distintos de V. Os elementos de V são denominados **nós** e os elementos de E são denominados de **arcos**.

Seja $e = (a, b)$ um arco de um grafo direcionado G. Denotamos e por ab. Nesse caso, dizemos que b é adjacente ou vizinho a a. Note que, diferentemente do caso não-direcionado, não necessariamente temos que a é adjacente a b, já que $(a, b) \neq (b, a)$.

Seja G um grafo que pode ser direcionado ou não. Um **passeio** de comprimento $k \geq 0$ em G é uma sequência finita $P := (v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_k, v_k)$ onde $v_i \in V(G)$ para todo $i \in \{0, ..., k\}$ e $e_i \in E(G)$ é tal que $e_i = v_{i-1}v_i$ para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Quando $v_0 = v_k$ dizemos que P é **fechado**. No caso em que os e_i's são distintos dois a dois, dizemos que P é uma **trilha**. Quando os v_i's são distintos dois a dois, dizemos que P é um **caminho**. É fácil ver que todo caminho é uma trilha. Finalmente, dizemos que P é um **circuito** quando é uma trilha fechada e os vértices diferentes de v_0 e v_k são distintos dois a dois. Em geral, escrevemos a sequência de vértices (ou nós) $(v_0, ..., v_k)$ para indicar P, já que a sequência de vértices (ou nós) determina unicamente P.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e A um conjunto de arestas. Denotamos por $G - A$ o grafo obtido de G ao se remover as arestas do conjunto A. Formalmente, $G \setminus A$ é o grafo dado por $V(G \setminus A) := V(G)$ e $E(G \setminus A) := E(G) \setminus A$.

Seja G um grafo e M um conjunto de arestas de G. Dizemos que M é um **emparelhamento** em G quando cada vértice v de G é extremo de no máximo uma aresta de M. Todo vértice v que é extremo de uma aresta de M é dito **coberto** por M.

Uma **bipartição** de um grafo G é um par de conjuntos (A, B) tais que $A \cup B = V(G)$ e $A \cap B = \emptyset$. Dizemos que G é **bipartido** quando admite uma bipartição. Escrevemos $G = (A \cup B, E)$ para indicar que G é um grafo e (A, B) é uma bipartição de G.

Capítulo 2

Emparelhamentos Estáveis em Grafos Bipartidos

Nosso estudo dos emparelhamentos estáveis tem como pano de fundo o estudo de grafos. Note que a estrutura de um grafo não é suficiente para modelar os problemas abordados no Capítulo 1. Uma parte essencial de tais problemas é a noção de preferência entre agentes. Portanto, faz-se necessário considerar grafos com uma estrutura adicional, a qual chamaremos de listas de preferências.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para cada vértice v, uma **lista de preferências** de v é uma ordenação total L_v das arestas incidentes a v. Se todo vértice de v possui uma lista de preferências, $G = (V, E, L)$ é denominado um **grafo de preferências**, onde L é o conjunto de todas as listas de preferências de G. Note que uma ordenação total das arestas incidentes a um vértice v corresponde, de modo natural, à uma ordenação dos vizinhos de v. De fato, dado um vértice v e dois vértices a, b vizinhos de v, diremos que v prefere a a b se v prefere a aresta va à aresta vb em relação à ordenação total L_v. Se v prefere a a b em relação a L_v, escreveremos que $a >_{L_v} b$ ou, quando L estiver subentendido, $a >_v b$. Finalmente, dado um vértice v de G e um vizinho a de v em G, o v*-posto* de a é a posição que a ocupa na lista de preferências de v. Mais precisamente, o v*-posto* de a é $|\{x \in N(v); x >_v a\}| + 1$. Por exemplo, se a é o vizinho preferido de v, seu v*-posto* é 1.

Sejam $G = (V, E, L)$ e $H = (V', E', L')$ grafos de preferências. Dizemos que H é **subgrafo de preferências** de G quando:

1. H é subgrafo de G.
2. Para quaisquer vértices $u, v, w \in V'$ tem-se que $u <_{L'_w} v \iff u <_{L_w} v$.

Seja M um emparelhamento de $G = (V, E, L)$. Para cada vértice v coberto por M, defina $M(v)$ como o seu parceiro em M. Agora considere $xy \notin M$. Dizemos que xy é uma aresta bloqueadora de M se x e y preferem um ao outro do que os seus parceiros (caso hajam). Formalmente, xy é uma aresta bloqueadora de M se satisfizer as 3 seguintes condições:

1. $xy \notin M$.

2. x não é coberto por M ou x prefere y a $M(x)$.
3. y não é coberto por M ou y prefere x a $M(y)$.

Seja M um emparelhamento de $G = (V, E, L)$. M é chamado de **emparelhamento estável** se nenhuma aresta bloqueia M. Vale notar que todo emparelhamento estável M é maximal. De fato, se existisse uma aresta que pudesse ser adicionada a M de modo a torná-lo um emparelhamento estável ainda maior, tal aresta bloquearia M.

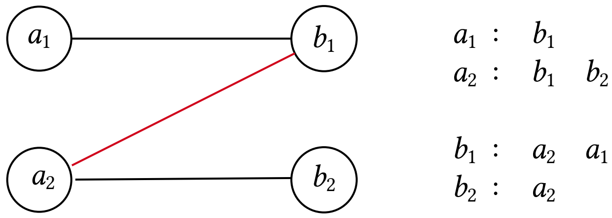


Figura 2.1: *Considere o grafo de preferências definido por meio da figura acima, onde à direita estão indicadas as listas de preferências de cada vértice em ordem decrescente de preferência (por exemplo, a_2 prefere b_1 a b_2). Note que a aresta a_2b_1 bloqueia $M_1 = \{a_1b_1, a_2b_2\}$ já que a_2 prefere b_1 a $b_2 = M_1(a_2)$ e b_1 prefere a_2 a $a_1 = M_1(b_1)$. Por outro lado, embora $M_2 = \{a_2b_1\}$ não cubra nem a_1 e nem b_2, ele é um emparelhamento estável. De fato, b_1 prefere a_2 a a_1 e a_2 prefere b_1 a b_2, de modo que nem a_1b_1 e nem a_2b_2 bloqueiam M_2.*

Iremos, inicialmente, considerar o caso particular onde as instâncias envolvem grafos bipartidos. Em tais instâncias, Gale e Shapley provaram a existência de ao menos um emparelhamento estável. Mais do que isso, eles formularam um algoritmo que, dado como entrada um grafo de preferências bipartido, devolve um emparelhamento estável [4].

O Problema do Casamento Estável consiste em achar um emparelhamento estável em um grafo bipartido com lista de preferências $G = (A \cup B, E, L)$. ab é uma aresta de G se a e b consideram um ao outro como possíveis parceiros (isto é, a pertence à lista de preferências de b e vice-versa). o algoritmo de Gale-Shapley (descrito na seção a seguir), em particular, prova o seguinte teorema.

Teorema 1. *Qualquer grafo de preferências bipartido possui ao menos um emparelhamento estável.*

2.1 Algoritmo de Gale-Shapley

Seja $G = (A \cup B, E, L)$ um grafo de preferências bipartido. Podemos descrever o algoritmo da seguinte forma. Em sequência, cada vértice a de A não emparelhado faz um pedido para se emparelhar com o seu vizinho favorito b dentre os vértices que ainda não rejeitaram a. Note que dizemos que um vértice v rejeitou um vértice w quando, ou v rejeitou o pedido de w para se emparelhar com ele, ou v desfez o emparelhamento com w. Se b não está emparelhado ou se b está emparelhado a um vértice c mas $a >_b c$, b aceita o pedido de a; Se b estava emparelhado a c, ele rejeita c o tornando não emparelhado. Em qualquer outro caso, b rejeita a proposta de a. Tal vértice a então faz um pedido para o seu próximo vizinho preferido. Esse processo para quando, para cada vértice a de G, ou a está emparelhado ou a fez pedidos para todos os seus vizinhos.

O pseudocódigo a seguir formaliza a descrição anterior.

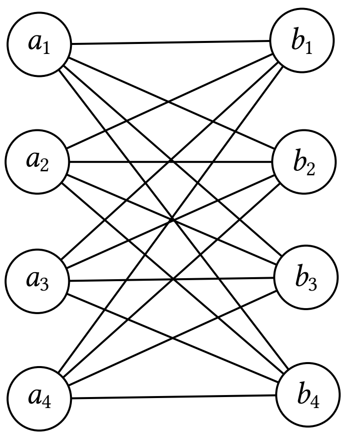
Algoritmo 1: Gale-Shapley

Entrada: Um grafo de preferências bipartido $G = (V = A \cup B, E, L)$
Saída: Um emparelhamento estável M de G

início
  Faça $M := \emptyset$
  para cada $v \in V$ **faça**
    $P(v) := L_v$
  enquanto *existe* $a \in A$ *não coberto por* M *tal que* $P(a) \neq \emptyset$ **faça**
    Seja b o vizinho preferido de a em $P(a)$
    se b *não é coberto por* M **então**
      $M := M \cup \{ab\}$
    senão se $a >_b M(b)$ **então**
      $M := M \setminus \{M(b)b\}$
      $M := M \cup \{ab\}$
    $P(a) := P(a) \setminus \{b\}$
  retorna M

2.1.1 Exemplo de execução do algoritmo

Para facilitar a compreensão, consideremos a execução do algoritmo para alguns exemplos de entrada. Nos exemplos abaixo, "$x \longrightarrow y$"significa que o vértice x fez um pedido para o vértice y.



a_1 : b_4 b_3 b_1 b_2
a_2 : b_2 b_3 b_4 b_1
a_3 : b_4 b_1 b_3 b_2
a_4 : b_2 b_1 b_4 b_2

b_1 : a_2 a_3 a_4 a_1
b_2 : a_4 a_2 a_3 a_1
b_3 : a_2 a_1 a_3 a_4
b_4 : a_3 a_1 a_2 a_4

Figura 2.2

Exemplo 2.1.1. Se o grafo da figura acima é dado como entrada, uma possível execução é a seguinte:

- $a_1 \longrightarrow b_4$, $a_2 \longrightarrow b_2$; Como b_4 e b_2 não estavam emparelhados, cada um deles se emparelha com o seu respectivo vértice.
- $a_3 \longrightarrow b_4$; Como b_4 prefere a_3 a a_1, ele rejeita a_1 e se emparelha com a_3.

- $a_1 \longrightarrow b_3$; Como b_3 não estava emparelhado, ele se emparelha com a_1.
- $a_4 \longrightarrow b_2$; Como b_2 prefere a_4 a a_2, ele desfaz o seu emparelhamento com a_2 e se emparelha com a_4.
- $a_2 \longrightarrow b_3$; Como b_3 prefere a_2 a a_1, ele desfaz o seu emparelhamento com a_1 e se emparelha com a_2.
- $a_1 \longrightarrow b_1$; Como b_1 não estava emparelhado, ele se emparelha com a_1.
- Como todos os vértices estão emparelhados, a execução se encerra devolvendo o emparelhamento $M = \{a_1b_1, a_2b_3, a_3b_4, a_4b_2\}$ (é possível verificar que toda aresta fora de M não é bloqueadora de modo que M é estável).

Exemplo 2.1.2. Consideremos como entrada o grafo da figura acima trocando-se os papéis de $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, de modo que, agora são os vértices b_i's que fazem os pedidos e os a_i's quem recebem (isto é, considere que $A = \{b_i's\}$ e $B = \{a_i's\}$). Nesse caso, uma possível execução seria:

- $b_1 \longrightarrow a_2$, $b_2 \longrightarrow a_4$; Como a_2 e a_4 não estavam emparelhados, cada um deles aceita o seu respectivo pedido.
- $b_3 \longrightarrow a_2$; Como a_2 prefere b_3 a b_1, a_2 desfaz o seu emparelhamento com b_1 e se emparelha com b_3.
- $b_1 \longrightarrow a_3$; Como a_3 não estava emparelhado, ele se emparelha com b_1.
- $b_4 \longrightarrow a_3$; Como a_3 prefere b_4 a b_1, ele desfaz o seu emparelhamento com b_1 e se emparelha com b_4.
- $b_1 \longrightarrow a_4$; Como a_4 prefere b_2 a b_1, ele desfaz o seu emparelhamento com b_1.
- $b_1 \longrightarrow a_1$; Como a_1 não estava emparelhado, ele se emparelha com b_1.
- Como todos os vértices estão emparelhados, a execução se encerra devolvendo o emparelhamento $M = \{a_1b_1, a_2b_3, a_3b_4, a_4b_2\}$ (é possível verificar que toda aresta fora de M não é bloqueadora de modo que M é estável).

Note que o emparelhamento obtido neste exemplo é idêntico ao obtido no exemplo anterior. No entanto, isso foi acidental. Como será provado na seção 2.2, em geral, o emparelhamento obtido é tal que cada vértice de A está com o seu melhor parceiro possível em um emparelhamento estável e cada vértice de B está com o seu pior parceiro possível. Usando esse fato, segue imediatamente que o grafo da figura 2.2 possui um único emparelhamento estável.

2.1.2 Corretude do algoritmo

O passo inicial é provar a corretude do algoritmo.

Teorema 2. *O algoritmo de Gale-Shapley termina devolvendo um emparelhamento estável.*

Demonstração. Seja $G = (A \cup B, V, L)$ o grafo de preferências dado como entrada para o algoritmo de Gale-Shapley. Primeiramente, provemos que o algoritmo termina. De fato, cada iteração do bloco **enquanto** que compreende as linhas 5 à 12, remove um elemento de $P(a)$ para algum vértice a de G. Como, para cada vértice a de G, $P(a)$ foi inicializado como L_a que é um conjunto finito, após uma quantidade finita de iterações, a condição do laço não será mais satisfeita.

Agora, seja M^* o conjunto de arestas devolvido pelo algoritmo quando G é dado como entrada. Note que, M^* é inicializado como o conjunto vazio, que é, trivialmente, um emparelhamento. Assim, basta provar que se M é um emparelhamento antes de uma iteração do laço **enquanto**, ele será um emparelhamento ao final da iteração. Sejam a e b definidos conforme o algoritmo nas suas linhas 5 e 6, respectivamente. Se b não é coberto por M, então claramente $M \cup \{ab\}$ é um emparelhamento, pois a, por definição, não é coberto por M. Se b é tal que $a >_b M(b)$, $M \setminus \{M(b)b\}$ é um emparelhamento, pois estamos apenas removendo uma aresta do emparelhamento. Note que b não é coberto por $M \setminus \{M(b)b\}$, e assim, por um argumento análogo ao do caso anterior, concluímos que $(M \setminus \{M(b)b\}) \cup \{ab\}$ é um emparelhamento. Isso prova que M^* é um emparelhamento.

Resta-nos provar que M^* é um emparelhamento estável. Suponha, por absurdo, que exista uma aresta ab que bloqueia M^*. Então, ou existe $c \in A$ que fez um pedido a b durante o algoritmo tal que $c >_b a$ ou b nunca recebeu uma proposta de a. Note que se b recebeu um pedido, é garantido que ele estará emparelhado ao final do algoritmo (isto é, b é coberto por M^*) e ele só rejeitará um pedido em razão de um pedido melhor. Isso implica que, se b recebeu um pedido, então b, ao final do algoritmo, estará emparelhado com um $d \in A$ tal que $d \geq_b c > a$ e, assim, ab não é aresta bloqueadora. Suponha então que b nunca recebeu uma proposta de a. Isso só pode acontecer se a, durante o algoritmo, fez um pedido à um vértice $c \in B$ e não foi rejeitado. Implicando que $ac \in M^*$ e, como cada vértice de A faz as propostas em ordem decrescente de preferência, $c >_a b$, o que contradiz o fato de ab ser uma aresta bloqueadora. Isso encerra a demonstração. $\square$

2.1.3 Consumo de tempo do algoritmo

Para realizarmos uma análise do consumo de tempo do algoritmo de Gale-Shapley, devemos fazer algumas considerações iniciais. Primeiramente, consideramos que a entrada do algoritmo de Gale-Shapley será especificada por um vetor L_v para cada vértice v do grafo G tal que:

$$L_v[i] = u \iff u \text{ ocupa a } i\text{-ésima posição na lista de preferências de } v$$

Assim, é possível construir em tempo $O(m)$ o vetor A_{pos} indexado pelas arestas de G tal que, sendo $a \in A$ e $b \in B$, vale que:

$$A_{\text{pos}}[ab] = i \iff a \text{ ocupa a } i\text{-ésima posição na lista de preferências de } b$$

Note que, dado um vértice $a \in A$ e dois vértices $b, b' \in N(a)$ e obtido o vetor A_{pos}, podemos determinar em tempo constante qual é o vértice preferido de a entre os vértices b e b'. Para isso, basta comparar $A_{\text{pos}}[ab]$ com $A_{\text{pos}}[ab']$. O menor dentre os dois corresponderá ao vértice preferido por a.

Consideramos também que o emparelhamento M do algoritmo será especificado por um vetor emp indexado pelos vértices de G de tal forma que, dado $v \in V(G)$:

$$emp[v] = w \iff w = null \text{ ou } (v \text{ é coberto por } M \text{ e } w = M(v))$$

Assim, remover uma aresta ab de M corresponde a fazer $emp[a] = null$ e $emp[b] = null$; adicionar uma aresta ab à M corresponde a fazer $emp[a] = b$ e $emp[b] = a$. Em particular, obtemos que as operações de adição e remoção de arestas de M consomem tempo constante.

Um importante requisito para se conseguir uma eficiente implementação do algoritmo de Gale-Shapley é o de conseguir encontrar em tempo constante um vértice de $a \in A$ não coberto por M tal que $P(a) \neq \emptyset$ (chamamos tais vértices de **vértices livres**). Um modo de alcançar esse objetivo seria usar uma fila que durante o algoritmo armazenaria os vértices livres de A.

Tal fila seria inicializada com todos os vértices de A, já que, no início do algoritmo, todos os vértices de A são livres. A cada iteração do bloco **enquanto**, tomamos como vértice a o vértice da frente da fila e o removemos da fila. Se o vértice b preferido de a é tal que b é coberto por M, temos dois casos. Se $a >_b M(b)$, verificamos se $P(M(b)) \neq \emptyset$ e, caso a resposta seja positiva, $M(b)$ é devolvido para o final da fila. Caso contrário, se $a <_b M(b)$, a é devolvido para o final da fila. Note que cada aresta de G corresponde a no máximo duas operações na fila (uma remoção e uma adição), de modo que o número de operações na fila é limitado por $2m = O(m)$.

Dado o exposto acima, estamos em condições de provar o seguinte resultado:

Teorema 3. *O algoritmo de Gale-Shapley, no pior caso, consome um tempo $O(m)$, onde m é o número de arestas do grafo dado como entrada.*

Demonstração. Note inicialmente que, como cada vértice $a \in A$ só faz pedidos a cada vizinho no máximo uma única vez, temos que o número de pedidos é limitado por m, onde $m := |E|$. Como cada iteração do bloco **enquanto** corresponde a exatamente um pedido (e vice-versa), temos que o número de iterações é $O(m)$.

Veja que a execução das linhas de números 2 a 4 consome tempo $O(m)$. Assim, resta-nos provar que cada iteração do bloco **enquanto** consome tempo constante. De fato, pelas considerações acima, cada operação no interior do bloco **enquanto** pode ser executada em tempo constante. $\square$

Irving e Gusfield provaram que não pode existir algoritmo que consuma no pior caso tempo $o(m)$ [5] e, portanto, o algoritmo de Gale-Shapley é assintoticamente ótimo.

2.2 Emparelhamentos A-ótimos

O leitor mais atento pode ter observado que o algoritmo de Gale-Shapley mostrado anteriormente possui um elemento de não-determinismo. A saber, a ordem em que os vértices de A fazem os pedidos não está especificada. Assim, uma pergunta natural que surge é: "A ordem das realizações dos pedidos influencia na resposta dada pelo algoritmo?". Veremos mais a frente, nesta seção, que a resposta é negativa. Para responder à pergunta, lançaremos mão de que o emparelhamento estável devolvido por uma execução qualquer do algoritmo de Gale-Shapley possui uma propriedade especial que implicará na unicidade do emparelhamento.

Definiremos agora uma terminologia que nos será posteriormente útil. Seja $G = (V, E, L)$ um grafo de preferências (não necessariamente bipartido). Considere uma aresta $ab \in E$. Dizemos que ab é uma **aresta estável** se ela pertence a algum emparelhamento estável de G. Nesse caso, b é um **parceiro estável** de a (e vice-versa). Um vértice v é dito **vértice estável** se possui ao menos um parceiro estável. Se (A, B) é uma bipartição de G e M é um emparelhamento estável de G dizemos que M é **A-ótimo** se, cada vértice $a \in A$ estável está emparelhado, em M, com o seu parceiro estável preferido. Note que, em um emparelhamento A-ótimo podem existir vértices de A não emparelhados. Nesse caso, tais vértices devem ser necessariamente não estáveis.

Teorema 4. *O emparelhamento estável devolvido pelo algoritmo de Gale-Shapley é A-ótimo.*

Demonstração. Seja $G = (A \cup B, E, L)$ um grafo de preferências bipartido e seja M^* o emparelhamento devolvido pelo algoritmo de Gale-Shapley. Suponha, por absurdo, que M^* não é A-ótimo. Isso implica a existência de um vértice $a \in A$ e um emparelhamento estável M tal que $M(a) >_a M^*(a)$. Isso significa que $M(a)$ rejeitou $a \in A$ em razão de um pedido de um vértice $a' \in A$ em algum momento da execução do algoritmo (Em particular, $a' >_{M(a)} a$ e $a'M(a) \in E$). Podemos supor, sem perda de generalidade, que tal rejeição corresponde a primeira vez em que um vértice rejeitou um parceiro estável. Assim, a' não possui um parceiro estável que ele prefira à $M(a)$ (caso contrário, a' teria sido rejeitado anteriormente e isso contradiria o fato de a ter sido o primeiro vértice rejeitado). Logo, $M(a) >_{a'} M(a')$, donde $a'M(a)$ é uma aresta bloqueadora de M, o que é uma contradição. □

O Teorema acima nos conduz a duas conclusões interessantes. Primeiramente, ele nos garante que toda instância de um grafo de preferências bipartido possui um emparelhamento estável A-ótimo. Em outras palavras, se para cada vértice $a \in A$ tomarmos a aresta com um extremo em a e outro no seu parceiro estável preferido o resultado é um emparelhamento estável M. No entanto, à primeira vista, nada nos leva a crer que M seja um emparelhamento, quiçá um emparelhamento estável!

A segunda conclusão decorre diretamente do fato de que só existe um único emparelhamento A-ótimo (como é fácil notar). Assim, o Teorema 4 nos mostra que a ordem em que os pedidos são realizados não influencia na resposta dada pelo algoritmo de Gale-Shapley. A saída do algoritmo é sempre o emparelhamento A-ótimo para a instância dada como entrada. Isso responde a questão suscitada no início da seção.

Em muitas situações em Ciência da Computação, geralmente o ganho em relação a algum aspecto se dá à custa da perda em outro aspecto. Nesse contexto, são várias as ocasiões onde um algoritmo resolve um problema de modo ótimo no tempo à custa de um maior consumo de espaço. Dessa forma, não seria de se surpreender se o emparelhamento devolvido pelo algoritmo de Gale-Shapley fosse sub-ótimo em algum sentido em relação ao conjunto B.

Teorema 5. *No emparelhamento A-ótimo, cada vértice $b \in B$ estável está emparelhado com o seu parceiro estável menos preferido.*

Demonstração. Suponha que não seja o caso. Seja M_A o emparelhamento A-ótimo. Então, deve existir um vértice $b \in B$ estável e um emparelhamento estável M tal que $M_A(b) >_b M(b)$. Como M é um emparelhamento estável, $M(M_A(b)) >_{M_A(b)} b$ (Caso contrário, $M_A(b)b$ bloquearia M). Portanto, b não é o parceiro estável preferido de $M_A(b)$, o que contradiz o fato de M_A ser um emparelhamento A-ótimo. □

Motivado pelo Teorema 5, o emparelhamento A-ótimo é também chamado de B-**péssimo**.

Note que se trocarmos os papéis de A e B no algoritmo de Gale-Shapley (Os vértices de B passam a ser os que fazem os pedidos e os vértices de A passam a ser os que recebem os pedidos) obtemos que o emparelhamento devolvido pelo algoritmo é B-ótimo e A-péssimo. Assim, diz-se que o algoritmo de Gale-Shapley possui duas orientações possíveis, sendo uma a que os vértices de A fazem os pedidos (e os de B recebem) e a outra a que os vértices de B fazem os pedidos (e os de A recebem). No primeiro caso o algoritmo de Gale-Shapley é denominado A-orientado e, no segundo, B-orientado. A menos de menção em contrário, quando escrevemos algoritmo de Gale-Shapley estaremos nos referindo a versão A-orientada.

2.2.1 Algoritmo estendido de Gale-Shapley

Considere que, em uma execução arbitrária do algoritmo de Gale-Shapley, um vértice $b \in B$ aceita um pedido proveniente de um vértice $a \in A$. Como um vértice de B só rejeita um vértice v' em favor de um pedido de um vértice de v quando $v <_b v'$ e, levando em conta que o grafo devolvido pelo algoritmo de Gale-Shapley é B-péssimo (fato provado na subseção anterior), concluímos que não existem emparelhamentos estáveis onde o vértice b está emparelhado com um vértice pior do que $a \in A$. Isso significa que, se $a' \in A$ é um vértice tal que $a' <_b a$, $a'b$ não bloqueia nenhum emparelhamento estável de G e, portanto, os conjuntos dos emparelhamentos estáveis de G e $G - \{a'b\}$ são idênticos. Em outras palavras, remover a aresta $a'b$ não conduz a nenhum prejuízo do ponto de vista de encontrar emparelhamentos estáveis.

A simples observação do parágrafo anterior nos conduz ao chamado **algoritmo de**

Gale-Shapley estendido, descrito abaixo.

Algoritmo 2: Gale-Shapley estendido

Entrada: Um grafo de preferências bipartido $G = (V = A \cup B, E, L)$
Saída: Um subgrafo de preferências G' de G e um emparelhamento estável M de G

1 **início**
2 Faça $M := \emptyset$ e $G' := G$
3 **para cada** $v \in V$ **faça**
4 $P(v) := L_v$
5 **enquanto** *existe* $a \in A$ *não coberto por* M *tal que* $P(a) \neq \emptyset$ **faça**
6 Seja b o vizinho preferido de a em $P(a)$
7 **se** b *é coberto por* M **então**
8 $M := M \setminus \{M(b)b\}$
9 $M := M \cup \{ab\}$
10 **para cada** $a' \in A$ *vizinho de* b *em* G' *tal que* $a' <_b a$ **faça**
11 $G' := G' - \{a'b\}$
12 $P(a) := P(a) \setminus \{b\}$
13 **retorna** (M, G')

Vale notar que, diferentemente do algoritmo de Gale-Shapley, a versão estendida devolve um subgrafo de preferências G' de G além de um emparelhamento estável M. Denotaremos G' por G_A. Além disso, denotaremos por G_B o grafo de preferências devolvido pela versão B-orientada do algoritmo de Gale-Shapley estendido quando um grafo de preferências bipartido G é dado como entrada.

Vale observar também que a remoção das arestas executada na linhas 10-11 garante apenas que não haverá mais “rejeições imediatas” durante a execução do algoritmo, isto é, um vértice a nunca realiza um pedido a um vértice b tal que $M(b) >_b a$. A partir dessa observação, é possível concluir que o emparelhamento estável devolvido pelo algoritmo de Gale-Shapley estendido é o mesmo devolvido pela versão original e, portanto, é o A-ótimo de G e, logo, de G_A (já que G e G_A possuem os mesmos emparelhamentos estáveis). Analogamente, conclui-se o emparelhamento devolvido pela versão B-orientada do algoritmo é o B-ótimo de G e de G_B.

Agora, denote por M_A e M_B os emparelhamentos A-ótimo e B-ótimo de um grafo de preferências bipartido G, respectivamente. Note que G_A corresponde a G após a remoção de todas as arestas $ab \in E(G)$ tais que $M_A(b) >_b a$ e que G_B é G sem as arestas $ab \in E(G)$ tais que $M_B(a) >_a b$ (I). Além disso, a observação de que G, G_A e G_B possuem os mesmos emparelhamentos estáveis nos conduz a de que o conjunto de emparelhamentos estáveis de G, G_{A_B}, G_{B_A} é o mesmo (II). Assim, segue de (I) e (II), que G_{A_B} e G_{B_A} corresponde ao grafo G após a remoção das arestas $ab \in E(G)$ tais que $M_A(b) >_b a$ ou $M_B(a) >_a b$. Em particular, $G_{A_B} = G_{B_A}$.

Vamos chamar o grafo de preferências G_{A_B} $(= G_{B_A})$ de Gale-Shapley-reduzido ou, mais simplesmente, de GS-reduzido. O teorema a seguir resume as propriedades relevantes do grafo GS-reduzido.

Teorema 6. *Seja G um grafo de preferências bipartido. Então:*

1. *todos os emparelhamentos estáveis de G são também emparelhamentos estáveis do grafo GS-reduzido de G.*
2. *nenhum emparelhamento estável do grafo GS-reduzido é bloqueado por uma aresta de G não contida no grafo GS-reduzido.*
3. *Seja M_A (M_B) o emparelhamento A-ótimo (B-ótimo) de G. Se $a \in A$ é coberto por M_A (M_B) então $M_A(a)$ ($M_B(a)$) é o vizinho (menos) preferido de a no grafo GS-reduzido e se $b \in B$ é coberto por M_A (M_B), então $M_A(b)$ ($M_B(b)$) é o vizinho menos (mais) preferido de b no grafo GS-reduzido.*

Demonstração.

1. A prova segue diretamente do fato que os conjuntos dos emparelhamentos estáveis de G e do grafo GS-reduzidos são os mesmos (demonstrado na discussão acima).
2. Seja $ab \in E(G)$ uma aresta não contida no grafo GS-reduzido de G e M um emparelhamento estável arbitrário de G tal que $ab \notin M$. Denote por M_A, M_B os emparelhamentos estáveis A-ótimo e B-ótimo de G, respectivamente. Assim, $M(b) \geq_b M_A(b)$ (M_A é B-péssimo) e $M(a) \geq_a M_B(a)$ (M_B é A-péssimo) (I). Por outro lado, como ab não pertence ao grafo GS-reduzido, segue que $M_B(a) >_a b$ ou $M_A(b) >_b a$ (II). De (I) e (II), vem que $M(b) \geq_b M_A(b) >_b a$ ou $M(a) \geq_b M_B(a) >_b b$, donde, $M(b) >_b a$ ou $M(a) >_a b$, isto é, ab não bloqueia M.
3. Vamos provar apenas as afirmações referentes a M_A, pois a prova das referentes a M_B é inteiramente análoga. Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Se $ab' \in E(G)$ é tal que $M_A(a) <_a b'$, como M_A é estável, tem-se que $M_A(b') >'_b a$, implicando que ab' não pertence ao grafo GS-reduzido. Assim, segue que $M_A(a)$ é o vizinho preferido de a no grafo GS-reduzido. Se $a'b \in E(G)$ é tal que $M_A(b) >_b a'$ segue diretamente que $a'b$ não pertence ao grafo GS-reduzido.

□

2.3 Teorema dos hospitais rurais

Seja $G = (A \cup B, E, L)$ um grafo de preferências bipartido e seja M um emparelhamento estável de G. Seja a um vértice de G que não é coberto por M. Será que existe um outro emparelhamento estável M' de G tal que a é coberto por M'? Nesta seção encontraremos a resposta para essa questão.

Como ponto de partida, buscaremos estender a noção de preferência entre vértices de modo que ela se aplique a emparelhamentos. Sejam M e M' emparelhamentos (não necessariamente estáveis) de G e a um vértice de G. Dizemos que a prefere M a M', e escrevemos $M' <_v M$, quando vale uma das seguintes condições:

1. a é coberto por M e a não é coberto por M'

2. a é coberto por M e por M' e $M'(a) <_v M(a)$.

Dizemos que a é indiferente a M e M', e escrevemos $M =_a M'$ quando, ou não é coberto tanto por M quanto por M', ou quando é coberto por ambos e $M(a) = M'(a)$. Por fim, escrevemos $M \leq_a M'$ quando $M =_a M'$ ou $M <_a M'$.

Com o exposto acima, estamos em condições de provar um resultado que, embora à priori pareça arbitrário, será de fundamental importância nessa seção (na prova do Teorema dos hospitais rurais) e na seção a seguir.

Lema 1. *Considere um grafo de preferências $G = (V = A \cup B, E, L)$ e dois emparelhamentos estáveis M e M'. Se $a \in A$ e $b \in B$ são tais que $M(a) = b$ e b não é parceiro de a em M', então, um dos dois vértices prefere M a M' e o outro prefere M' a M.*

Demonstração. Seja A_M o conjunto dos vértices $a \in A$ tais que $M' <_a M$ e $A_{M'}$ o conjunto dos vértices $a \in A$ tais que $M <_a M'$. Defina B_M e $B_{M'}$ de maneira análoga. Levando em conta essas definições, a figura 2.3 ilustra o lema.

Note, inicialmente, que se $a \in A_M$ e $ab \in E$, então $b \in B_M \cup B_{M'}$ ou, em outras palavras, todo vizinho de $a \in A_M$ não é indiferente a M e M' (I) (De fato, se assim o fosse, teríamos, por definição de indiferença, que $M'(b) = M(b) = a$, o que, por sua vez, implicaria que a é indiferente a M e M').

Note que não pode haver aresta $ab \in M$ com $a \in A_M$ e $b \in B_M$ (II). Para provar isso, suponha, por absurdo, que haja tal aresta ab. Se a não fosse coberto por M', b não seria coberto por M' (pois b prefere M a M'), implicando que ab bloqueia M' e M' não é estável. Logo, a é coberto por M', implicando que b também é coberto por M'. Daí, como ambos os vértices a e b preferem M a M', segue-se que ab bloqueia M', o que é uma contradição. De forma inteiramente análoga, conclui-se que não pode haver aresta $a'b' \in M'$ tal que $a' \in A_{M'}$ e $b' \in B_{M'}$ (III).

De (II) e por (I), segue que, se $ab \in M$ e $a \in A_M$, então $b \in B_{M'}$ (IV), donde $|A_M| \leq |B_{M'}|$, pois M induz uma injeção de A_M em $B_{M'}$. De (III), conclui-se, de modo análogo, que $|B_{M'}| \leq |A_M|$. Portanto, $|A_M| = |B_{M'}|$ (V).

Para encerrar a demonstração, tome uma aresta $ab \in M$ tal que a e b não são parceiros em M'. Se $a \in A_M$, por (V), temos que $b \in B_{M'}$. Resta-nos provar que $a \in A_{M'} \implies b \in B_M$. Suponha, por absurdo, que $a \in A_{M'}$ e $b \in B_{M'}$. Assim, por (V), vem que M induz uma bijeção de A_M para $B_{M'}$, e portanto, existiria $a' \in A_M$ tal que $M(a') = b$ e M não seria um emparelhamento.

□

Uma consequência imediata do lema anterior é:

Corolário 1. *Considere um grafo de preferências $G = (V = A \cup B, E, L)$ e dois emparelhamentos estáveis M e M'. O número de vértices que preferem M a M' é igual ao número de vértices que preferem M' a M.*

Um emparelhamento M tal que, para qualquer outro emparelhamento M', o número de vértices que preferem M a M' é maior ou igual ao número de vértices que preferem M'

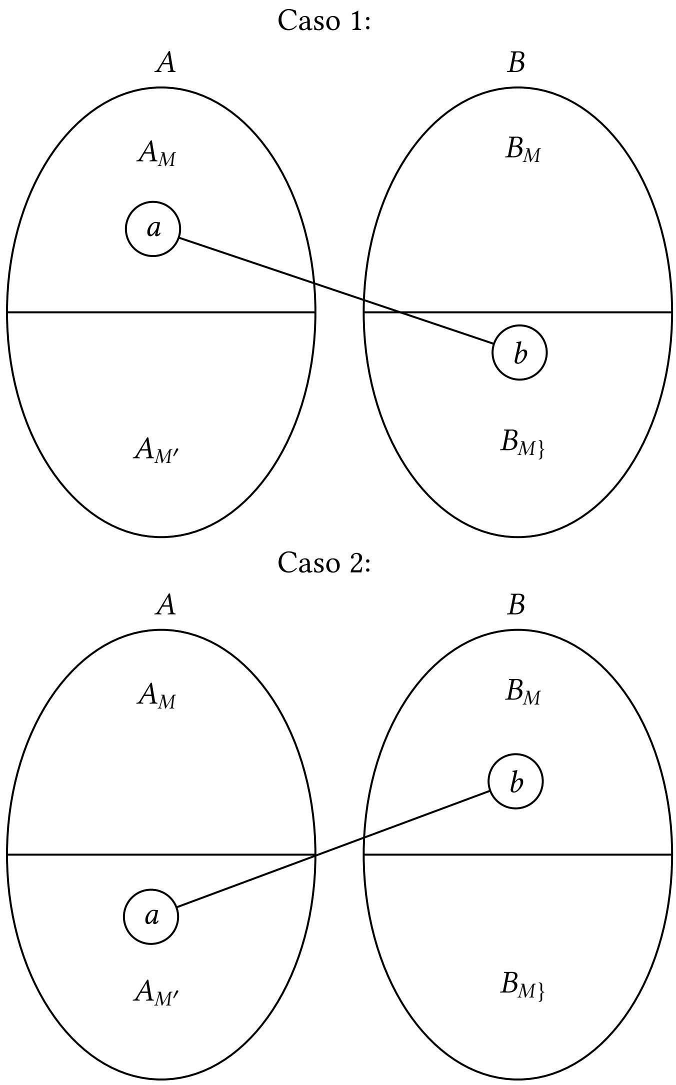


Figura 2.3: *O Lema 1 nos diz que, dada uma aresta $ab \in M$ tal que a e b não são parceiros em M', só um dos casos acima pode ocorrer.*

a M é denominado **emparelhamento popular**. Assim, o Corolário 1, implica que todo emparelhamento estável é popular.

A classe dos emparelhamentos populares é foco de grande estudo devido às suas aplicações em ciências aplicadas, tais como a economia. Um emparelhamento ser popular significa em um certo sentido que ele é ótimo globalmente. Se imaginarmos cada vértice como um eleitor e cada emparelhamento como um candidato à presidência, digamos, um emparelhamento popular corresponderia a um candidato que não perderia uma eleição numa disputa com qualquer outro candidato.

Agora temos o ferramental necessário para provar o Teorema que dá o nome à presente seção e que responde a questão suscitada no início dela.

Teorema 7 (hospitais rurais)**.** *Seja $G = (A \cup B, E, L)$ um grafo de preferências bipartido e v um vértice de G. Se existe um emparelhamento estável que não cobre v então nenhum emparelhamento estável cobre v.*

Demonstração. Seja $G_{M,M'}$ o grafo direcionado cujo conjunto de nós é V e o conjunto $E(G_{M,M'})$ de arcos é definido da seguinte forma. Para cada vértice $a \in A$ coberto por M, existe um arco de a para $M(a)$ e para cada vértice de $b \in B$ coberto por M', temos um arco de b para $M'(b)$. A figura a seguir ilustra $G_{M,M'}$. Note que todo nó de $G_{M,M'}$ possui grau de entrada e de saída ambos no máximo 1 (I). Além disso, o grau de entrada de v em $G_{M,M'}$ é 0 (II).

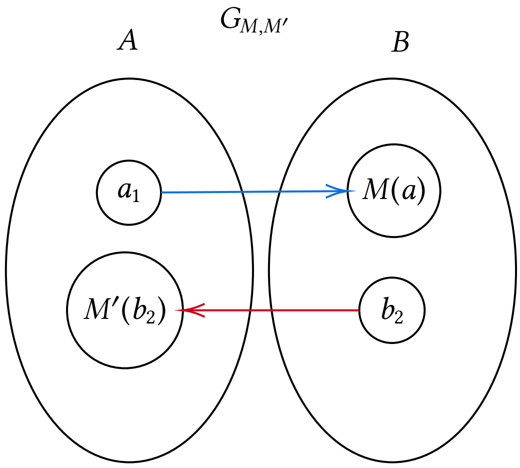


Figura 2.4: *As arestas pintadas de azul correspondem as induzidas pelo emparelhamento M e as pintadas de vermelho são as induzidas pelo emparelhamento M'.*

Suponha, por absurdo, que exista um vértice v de G e emparelhamentos estáveis M e M' tais que v é coberto por M mas não é coberto por M'. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $v \in A$. Seja $T = (v_0, v_1, ..., v_r)$ uma trilha mais longa partindo de v em $G_{M,M'}$ (isto é, $v_0 = v$). Tal trilha deve existir pois $G_{M,M'}$ é finito. Por (I) e (II), vem imediatamente que $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{0, ..., r\}$ (III).

Note que $v_0 \in A$ prefere M a M' e v_0 e v_1 não são parceiros em M'. Assim, pelo Lema 1, $v_1 \in B$ prefere M' a M. Aplicando o Lema 1 novamente, já que v_1 e v_2 não são parceiros em M, obtemos que $v_2 \in A$ prefere M a M'. Assim, por um argumento indutivo, é possível concluir que v_i prefere M a M' se i for par e prefere M' a M se i for ímpar.

Finalmente, se r for ímpar, v_r prefere M' a M e $v_r \in B$. Note que $M(v_{r-1}) = v_r$. Assim, v_r é coberto por M' e $v_{r+1} := M'(v_r)$ é tal que $v_r v_{r+1} \in E(G_{M,M'})$. Daí, por (III), $v_r v_{r+1} \notin E(T)$, implicando que $T' = (v_0, v_1, ..., v_r, v_{r+1})$ é uma trilha de $G_{M,M'}$ mais longa que T, o que é uma contradição. A prova do caso em que r é par é inteiramente análoga.

□

Um corolário imediato do teorema é o seguinte.

Corolário 2. *Se um vértice de um grafo de preferências bipartido G é coberto por um emparelhamento estável então ele é coberto por qualquer emparelhamento estável de G. De modo equivalente, Se um vértice não é coberto por um emparelhamento estável, ele não é coberto por nenhum outro emparelhamento estável.*

Um problema interessante de Teoria dos Jogos é o de alocação de residentes a hospitais. Em tal problema, temos médicos se candidatando a hospitais. Suponhamos que cada médico se candidata a um conjunto de hospitais e que ele possui uma ordem de preferência estrita em relação aos hospitais aos quais ele se candidatou. Cada hospital tem um número fixo e limitado de vagas. Além disso, cada hospital avalia os seus candidatos através de um exame. Assuma, por simplicidade, que dois candidatos não podem receber a mesma nota em um exame de um mesmo hospital. Por meio dessa avaliação, cada hospital cria uma lista de classificação dos seus candidatos. Queremos encontrar uma alocação de médicos a hospitais de modo que o número de médicos alocados a um hospital h arbitrário não seja maior que o número de vagas de h. Cada médico só pode ser alocado a um hospital ao qual ele se candidatou. Além disso, em uma dada alocação, não pode ocorrer de um médico m ser alocado a um hospital h tal que haja um médico $m' \neq m$ abaixo na lista de classificação de h em relação a m e que m prefira h ao hospital a que ele foi alocado.

Tal problema pode ser modelado matematicamente como o de encontrar um emparelhamento estável em um grafo de preferências bipartido $G = (V = A \cup B, E, L)$ definido da seguinte forma:

1. A representa o conjunto dos residentes e B representa o conjunto dos hospitais.

2. Para cada hospital h com número de vagas c_h temos c_h vértices de B que se referem a h. A cada tal vértice, associamos um índice de 1 a c_h.

3. Cada residente r é representado por um único vértice $a_r \in A$.

4. Se um residente r se candidatou a um hospital h, existe uma aresta do vértice $a_r \in A$ que representa r para cada vértice que se refere ao hospital h. A lista de preferências de a_r é tal que: se r prefere o hospital h ao h', então vértices que se referem a h aparecem na frente de vértices de se referem a h'. Vértices que se referem a um mesmo hospital h aparecem na lista de preferência em ordem crescente do seu índice (isto é, o de ordem menor aparece na frente).

Modelando o problema dessa forma, ele se reduz ao de encontrar um emparelhamento estável em um grafo de preferências bipartido.

Nos Estados Unidos, existe um órgão, o National Resident Matching Program (NRMP), responsável por realizar a alocação de seus médicos residentes aos hospitais. O Órgão utiliza um algoritmo que, em essência, é o de Gale-Shapley de encontrar um emparelhamento estável [9]. Lá, em geral, o número de vagas é maior que o número de aplicantes e, portanto, existem hospitais onde nem todas as suas vagas são preenchidas. Devido a uma preferência dos residentes aos hospitais urbanos, o emparelhamento estável encontrado pelo algoritmo em geral ocasionava uma grande quantidade de vagas não preenchidas nos hospitais rurais.

Isso levantou a questão de se talvez fosse possível alterar o algoritmo de modo a fazê-lo encontrar um emparelhamento estável onde o número de vagas preenchidas nos hospitais rurais fosse maior. O Teorema dos Hospitais Rurais responde a essa questão negativamente (e daí o seu nome).

2.4 Estrutura Algébrica dos Emparelhamentos Estáveis

É possível munir o conjunto dos emparelhamentos estáveis de um grafo bipartido com preferências de uma relação de ordem de modo natural de modo a constituir o que os algebristas chamam de um reticulado distributivo (conceito que será definido precisamente mais a frente). Nessa seção usaremos esse fato e daremos uma demonstração da existência de um emparelhamento estável A-ótimo sem lançar mão da corretude do algoritmo de Gale-Shapley.

Iniciaremos a seção introduzindo uma terminologia básica de teoria da ordem suficiente para os propósitos dessa seção. O leitor familiarizado com conceitos básicos de Teoria da Ordem pode pular para a subseção 2.4.2.

2.4.1 Terminologia básica de teoria da ordem

Seja $\preccurlyeq$ uma relação definida num conjunto S (isto é, $\preccurlyeq$ é um subconjunto de $S \times S$). Dizemos que $\preccurlyeq$ é uma **ordem parcial** em S se ela possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $a \in S$ vale que $a \preccurlyeq a$. (**Reflexividade**)
2. Para todo $a, b, c \in S$ tem-se que ($a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq c \Longrightarrow a \preccurlyeq c$). (**Transitividade**)
3. Para todo $a, b \in S$ tem-se que ($a \preccurlyeq b$ e $b \preccurlyeq a \Longrightarrow a = b$). (**Antissimetria**)

O par $(S, \preccurlyeq)$ é chamado de **conjunto ordenado**. Se $a, b \in S$ são tais que $a \preccurlyeq b$ ou $b \preccurlyeq a$, dizemos que a e b são **comparáveis**. Caso contrário, a e b são ditos **incomparáveis**. Se todo par de elementos de S forem comparáveis, diremos que $\preccurlyeq$ é uma **ordem total** e que $(S, \preccurlyeq)$ é um **conjunto totalmente ordenado**.

Seja $(S, \preccurlyeq)$ um conjunto ordenado e $H \subseteq S$. Dizemos que H é **limitado superiormente** quando existe um $s \in S$ tal que $h \preccurlyeq s$ para todo $h \in H$. Tal s é denominado uma **cota superior** de H. De modo análogo, dizemos que H é **limitado inferiormente** quando existe $i \in S$ tal que $i \preccurlyeq h$ para todo $h \in H$. Tal i é dito uma **cota inferior** de H. H é dito **limitado** se é limitado superiormente e inferiormente. Se s é cota superior (inferior) de H e $s \in H$, então s é dito **máximo** (**mínimo**) de H. Vale notar que se H possui máximo (ou mínimo) então ele é único e isso não é verdade, em geral, quando falamos de cotas (superiores ou inferiores).

Se H é limitado superiormente (inferiormente) e conjunto das cotas superiores (inferiores) possui mínimo (máximo), tal mínimo (máximo) é chamado de **supremo** (**ínfimo**) de H.

Seja $(S, \preccurlyeq)$ um conjunto ordenado. Dizemos que S é um **reticulado** se todo $\{a, b\} \subseteq S$ possui supremo e ínfimo. Denotamos tais supremo e ínfimo por $a \vee b$ e $a \wedge b$, respectivamente.

Uma observação importante é a de que os operadores $\vee$ e $\wedge$ são associativos. Vamos provar apenas que $\vee$ é associativo (A associatividade de $\wedge$ pode ser provada de modo análogo). Para isso, suponha que $(S, \preccurlyeq)$ é um reticulado e considere $a, b, c \in S$. Defina

$s' = (a \vee b) \vee c$ e $s'' = a \vee (b \vee c)$. Assim, $s' \succcurlyeq a \vee b$, isto é, $s' \succcurlyeq a$ e $s' \succcurlyeq b$. Além disso, $s' \succcurlyeq c$. Logo, $s' \succcurlyeq (b \vee c)$ e $s' \succcurlyeq a$. Daí, s' é cota superior de $\{a, b \vee c\}$ e, portanto, $s' \succcurlyeq s\varepsilon$, pois é $s\varepsilon$ é a menor das cotas superiores de $\{a, b \vee c\}$. Analogamente, vem que $s\varepsilon \succcurlyeq s'$. Pela propriedade antissimétrica de $\preccurlyeq$, vem que $s\varepsilon = s'$, como queríamos provar. Assim, podemos ocultar os parênteses e escrever $a \vee b \vee c$ (ou $a \wedge b \wedge c$) sem corrermos os risco de incorrermos em ambiguidade.

Um reticulado $(S, \preccurlyeq)$ é dito **distributivo** quando o operador $\vee$ se distribui em relação ao operador $\wedge$ (e vice-versa), isto é, para todo $a, b, c \in S$, tem-se que $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ e que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

2.4.2 O conjunto dos emparelhamentos estáveis é um reticulado distributivo

Seja $G = (V = A \cup B, E, L)$ um grafo bipartido com preferências e denote por $S(G)$ o conjunto dos emparelhamentos estáveis de G. Defina em $S(G)$ a relação $\preccurlyeq_A$ do seguinte modo. Dados dois emparelhamentos estáveis M_1 e M_2, $M_1 \preccurlyeq_A M_2$ se, e somente se, para cada vértice $a \in A$ tem-se que $M_1 <_a M_2$ ou a é indiferente a M_1 e M_2.

O intuito desta seção é provar o seguinte teorema.

Teorema 8. *$(S(G), \preccurlyeq_A)$ é um reticulado distributivo.*

Inicialmente, demonstremos que $\preccurlyeq_A$ define uma ordem parcial em G.

Lema 2. *$\preccurlyeq_A$ é uma ordem parcial em G.*

Demonstração. Considere abaixo que M_1, M_2 e M_3 são emparelhamento estáveis arbitrários de G.

1. Para cada vértice $a \in A$, de $M_1(a) = M_1(a)$ segue trivialmente que a é indiferente a M_1 e M_1. Logo, $\preccurlyeq_A$ é reflexivo.

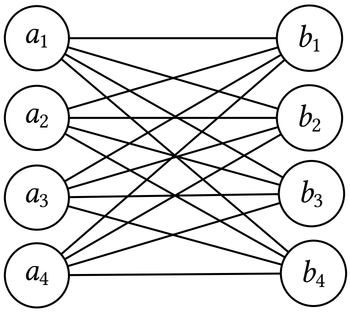
2. Se $M_1 \preccurlyeq_A M_2$ e $M_2 \preccurlyeq_A M_3$, então, para cada vértice $a \in A$, tem-se que $M_1 \leq_a M_2$ e $M_2 \leq_a M_3$. Assim, pela transitividade de $\leq_a$, segue que $M_1 \leq_a M_3$, para todo $a \in A$, donde segue que $M_1 \preccurlyeq_A M_3$. Portanto, $\preccurlyeq_A$ é transitivo.

3. Suponha que $M_1 \preccurlyeq_A M_2$ e $M_2 \preccurlyeq_A M_1$ e tome um vértice $a \in A$. Por definição de $\preccurlyeq_A$, tem-se que $M_1 \leq_a M_2$ e $M_2 \leq_a M_1$. Se a não é coberto por M_1, de $M_2 \leq_a M_1$, segue que a não é coberto por M_2. Analogamente, se a não é coberto por M_2 segue que a não é coberto por M_1. Suponha então que a é coberto por M_1 e M_2. Assim, $M_1(a) \leq_a M_2(a)$ e $M_1(a) \leq_a M_2(a)$. Se $M_1(a) \neq_a M_2(b)$, teríamos que $M_1(a) <_a M_2(a)$ e $M_2(a) <_a M_1(a)$, o que é um absurdo. Logo, $M_1(a) = M_2(a)$.

   Assim, provamos que, para cada vértice $a \in A$, ou a não é coberto por ambos M_1 e M_2 , ou a é coberto por M_1 e por M_2 e $M_1(a) = M_2(a)$. Daí segue que $M_1 = M_2$. Portanto, $\preccurlyeq_A$ possui a propriedade antissimétrica.

□

Assim, $(S, \preccurlyeq_A)$ é um conjunto ordenado. Vale notar que, em geral, $\preccurlyeq_A$ não é uma ordem total em G, como mostra o exemplo exibido na figura abaixo.



a_1 :	b_2	b_1	b_3	b_4		b_1 :	a_1	a_2	a_4	a_3
a_2 :	b_1	b_2	b_4	b_3		b_2 :	a_2	a_1	a_4	a_3
a_3 :	b_3	b_4	b_1	b_2		b_3 :	a_4	a_3	a_2	a_1
a_4 :	b_4	b_3	b_1	b_2		b_4 :	a_3	a_4	a_1	a_2

Figura 2.5: *Considere o grafo de preferências definido por meio da figura acima, onde à direita estão indicadas as listas de preferências de cada vértice em ordem decrescente de preferência (por exemplo, a_2 prefere b_2 a b_3). É possível verificar que $M_1 = \{a_1b_2, a_2b_1, a_3b_4, a_4b_3\}$ e $M_2 = \{a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4\}$ são emparelhamentos estáveis. Note que $M_2(a_1) = b_1 \leq_{a_1} b_2 = M_1(a_1)$ e, logo, não é o caso que $M_1 \preccurlyeq_A M_2$. Por outro lado, $M_1(a_3) = b_4 \leq_{a_3} b_3 = M_2(a_3)$ e, logo, é falso que $M_2 \preccurlyeq_A M_1$. Portanto, M_1 e M_2 não são comparáveis por $\preccurlyeq_A$.*

O natural seria provar agora que $(S, \preccurlyeq_A)$ é um reticulado, o que virá como consequência do lema abaixo.

Lema 3. *Sejam M_1 e M_2 dois emparelhamentos estáveis. Seja M o conjunto de arestas definido da seguinte forma. Para cada vértice $a \in A$ tal que a é coberto por M_1 ou é coberto por M_2, se $M_1 \leq_a M_2$, $aM_2(a) \in M$. Caso contrário, $aM_1(a) \in M$. Temos que M é um emparelhamento estável.*

Demonstração. Primeiramente, provemos que M é um emparelhamento. Pela definição de M, fica claro que a é extremo de no máximo uma aresta em M para todo $a \in A$. Seja $b \in B$ coberto por M. Para provar o requerido, é suficiente provar que $ab, a'b \in M$ implica $a = a'$. Note que ab e ab' são arestas de $M_1 \cup M_2$. Assim, no caso de ambas pertencerem a M_1 ou de ambas pertencerem a M_2, segue, da definição de emparelhamento, que $a = a'$. Suponha então, sem perda de generalidade, que $ab \in M_1$ e $a'b \in M_2$. Como $ab \in M_1$ e $ab \in M$, temos, pela definição de M, que $M_2(a) \leq_a b$ e isso, por sua vez, pelo fato de M_2 ser um emparelhamento estável, implica que $a \leq_b a'$ (Caso contrário, $a'b$ seria uma aresta bloqueadora de M_2). De modo inteiramente análogo, conclui-se que $a' \leq_b a$. Logo, $a = a'$. Isso prova que M é um emparelhamento.

Resta-nos provar que M é um emparelhamento estável. Suponha, por absurdo, que ab é uma aresta bloqueadora de M. Assim, (a não é coberto por M ou $M(a) <_a b$) e (b não é coberto por M ou $M(b) <_b a$). Consideremos 2 casos:

1. a não é coberto por M: Nesse caso, se b também não é coberto por M, teríamos que ab claramente bloqueia M_1 e M_2. Suponha então que b é coberto por M e $M(b) <_b a$. Assim, pela definição de M, teríamos duas possibilidades: $M(b) = M_1(b)$ ou $M(b) = M_2(b)$. A primeira implicaria que ab bloqueia M_1 e a segunda implicaria que ab bloqueia M_2.

2. a é coberto por M: Nesse caso, $M(a) <_a b$ (I). Note que $M(a) = M_1(a)$ ou $M(a) = M_2(a)$. Assim, se b não fosse coberto por M, ab bloquearia M_1 ou M_2, o que não pode ocorrer já que M_1 e M_2 são emparelhamento estáveis por hipótese. Daí, b é coberto por M e $M(b) <_b a$. Considere a partir de agora que $M(b) = M_1(b)$ (o outro caso é análogo). Se $M(a) = M_1(a)$, então ab bloquearia M_1. Logo, $M(a) = M_2(a)$. Mas, pela definição de M e (I), segue que $M_1(a) \leq_a M_2(a) = M(a) <_a b$, donde segue que ab bloqueia M_1, o que é uma contradição.

□

Em outras palavras, o que o lema 3 nos revela é que, dados dois emparelhamentos estáveis quaisquer, o emparelhamento obtido tomando-se para cada vértice de A o seu parceiro preferido em relação aos dois emparelhamentos é um emparelhamento estável. Assim, sendo M_1, M_2 e M como no enunciado do 3, é claro que M é cota superior de M_1 e M_2 em relação à ordem $\preccurlyeq_A$. Mais ainda, M é a menor das cotas superiores (isto é, supremo) de $\{M_1, M_2\}$. De fato, se M' é um emparelhamento estável tal que $M' \preccurlyeq_A M_1$ e $M' \preccurlyeq_A M_2$, então, para todo $a \in A$, $M'(a) \leq_a M_1(a)$ e $M'(a) \leq_a M_2(a)$, donde $M(a) \leq_a M'(a)$. Logo, $M'(a) \leq_a M_1(a)$. Assim, provamos que M é menor (segundo $\preccurlyeq_A$) que qualquer cota superior de $\{M_1, M_2\}$. Assim, $M = M_1 \vee M_2$.

Dados dois emparelhamentos estáveis M_1 e M_2 e definindo M' como o conjunto de arestas dado tomando-se, para cada $a \in A$ tal que a é coberto por M_1 ou M_2, a aresta de menor preferência (com respeito a a) dentre $aM_1(a)$ e $aM_2(a)$, é possível provar que M' é um emparelhamento estável e que $M' = M_1 \wedge M_2$. A prova é inteiramente análoga à do caso $\vee$. Portanto, $(S(G), \preccurlyeq)$ é, de fato, um reticulado.

Estamos agora em condições de provar a existência do emparelhamento A-ótimo sem lançar mão do algoritmo de Gale-Shapley. Não só isso, obtemos uma descrição elegante puramente algébrica de tal objeto. Note que, usando a terminologia de Teoria da Ordem exposta na seção anterior, é fácil ver que:

$$M \text{ é } A\text{-ótimo} \iff M \succcurlyeq_A M' \text{ para qualquer emparelhamento estável } M'.(I)$$

.

Considere que $S(G) = \{M_1, ..., M_r\}$ para algum r natural (Note que $S(G)$ é finito pois o número de emparelhamentos é finito) e defina $M = M_1 \vee M_2 \vee M_3 \vee ... \vee M_r$. Daí, $M \succcurlyeq M_i$ para todo i, donde, por (I), concluímos que M é A-ótimo. Substituindo no argumento acima $\vee$ por $\wedge$ obtemos uma descrição do emparelhamento B-ótimo.

Para encerrarmos a seção, resta-nos provar que $(S(G), \preccurlyeq)$ é distributivo. Primeiramente provemos um lema que simplificará a prova de tal fato.

Lema 4. *Seja $(S, \preccurlyeq)$ um reticulado. Então $\wedge$ se distribui em relação ao operador $\vee$ se, e somente se, $\vee$ se distribui em relação ao operador $\wedge$.*

Demonstração. Por simetria, basta provarmos um sentido da equivalência do enunciado. Deste modo, suponha que $\wedge$ se distribui em relação ao operador $\vee$ (I). Daí, dados $a, b, c \in S$, temos:

$$\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c), \text{ por (I)} \\
&= ((a \wedge a) \vee (b \wedge a)) \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)), \text{ novamente por (I)} \\
&= (a \vee (b \wedge a)) \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)), \text{ pois } a = a \wedge a \\
&= (a \vee (b \wedge a) \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c), \text{ pois } \vee \text{ é associativo} \\
&= a \vee (b \wedge c), \text{ pois } a \text{ é claramente o máximo de } \{a, b \wedge a, a \wedge c\}.
\end{aligned}$$

□

Segue abaixo a demonstração do Teorema 8.

Demonstração. Pelo exposto anteriormente, segue que $(S(G), \preccurlyeq)$ é um reticulado. O Lema 4 nos garante que basta demonstrarmos que $\wedge$ distribui em relação a $\vee$ para provarmos o Teorema.

Sejam M_1, M_2, M_3 emparelhamentos estáveis. Considere $M := M_1 \wedge (M_2 \vee M_3)$ e $M' := (M_1 \wedge M_2) \vee (M_1 \wedge M_3)$.

Tome $a \in A$. Inicialmente, suponha que a não é coberto por M. Então a não é coberto por M_1 (I) ou a não é coberto por $M_2 \vee M_3$ (II). Se (I), teríamos que a não é coberto nem por $M_1 \vee M_2$ e nem por $M_1 \vee M_3$ e, logo, se seguiria que a não é coberto por M'. No caso (II), obteríamos que a não é coberto nem por M_2 e nem por M_3, donde se seguiria facilmente que a não é coberto por $M_1 \wedge M_2$ e $M_1 \wedge M_3$, isto é, que a não é coberto por M'. Reciprocamente, suponha que a não é coberto por M'. Disso segue que a não é coberto por $M_1 \wedge M_2$ e nem por $M_1 \wedge M_3$, donde vem que, ou a não é coberto por M_1, ou a é coberto por M_1 mas não é coberto nem por M_2 e nem por M_3. Em qualquer um dos casos, obtemos que a não é coberto por M. Logo, concluímos que (a não é coberto por $M \iff a$ não é coberto por M') para todo $a \in A$.

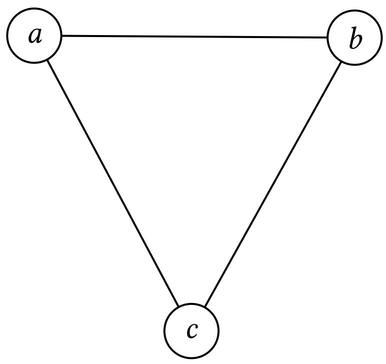
Agora, tome $a \in A$ e suponha que a é coberto por M (e, portanto, coberto por M'). Suponha, sem perda de generalidade, que $M_2 \leq_a M_3$. É fácil ver que isso implica que a deve ser coberto por M_1 e por M_3 (e, logo, por $M_2 \vee M_3$). Pela caracterização dos operadores $\vee$ e $\wedge$, temos que $M(a) = M_1(a)$ (I) ou $M(a) = M_3(a)$ (II). Supondo (I), vem que $(M_1 \wedge M_3)(a) = M_3(a)$ e, como $M_2 \preccurlyeq_a M_3$, concluímos que $M_3(a) \geq_a (M_2 \wedge M_1)(a)$, de modo que $M'(a) = M_3(a) = M(a)$. Supondo (II), vem que $M_3 \leq_a M_1$. Daí, $(M_1 \wedge M_3)(a) = M_3(a)$ e, como $M_2 \leq_a M_3 \leq_a$, segue que $(M_1 \wedge M_2)(a) = M_2(a)$. Finalmente, dado que $M_2 \leq_a M_3$, vem que $M'(a) = M_3(a) = M(a)$. Isso encerra a demonstração.

□

Capítulo 3

Emparelhamentos Estáveis em Grafos Quaisquer

O nosso objeto de estudo principal do capítulo anterior eram grafos de preferências com a propriedade particular de possuírem uma bipartição. Vimos, por exemplo, que em tais grafos é possível garantir a existência de ao menos um emparelhamento estável. Portanto, ao considerarmos grafos quaisquer, uma pergunta natural seria se ainda podemos fazer tal garantia. Infelizmente, a resposta é negativa. A figura abaixo define um exemplo de um grafo de preferências que não possui emparelhamento estável.



$a : c\ b$
$b : a\ c$
$c : b\ a$

Figura 3.1: *Primeiramente, vale recordar que todo emparelhamento estável é maximal (Fato observado imediatamente após a definição de emparelhamento estável no capítulo 2). Assim, os candidatos a emparelhamentos estáveis são $M_1 = \{ab\}, M_2 = \{bc\}, M_3 = \{ac\}$. No entanto, ac, ab, e bc bloqueiam M_1, M_2 e M_3, respectivamente.*

Knuth [7] chegou a conjecturar que o problema de decidir se um grafo de preferências arbitrário possui algum emparelhamento estável seria NP-completo. No entanto, Irving [5] refutou essa hipótese, elaborando um algoritmo que, em tempo linear, decide se um grafo de preferências possui um emparelhamento estável e, em caso positivo, devolve um. Neste capítulo, descreveremos tal algoritmo e provaremos a sua corretude.

3.1 Algoritmo de Irving

Para facilitar a compreensão, o algoritmo de Irving é classicamente subdividido em duas etapas.

3.1.1 Primeira etapa

Esta etapa consiste em realizar um pré-processamento no grafo de preferências dado como entrada. Tal pré-processamento possui bastante semelhanças com o algoritmo estendido de Gale-Shapley no sentido que arestas não estáveis (isto é, arestas que não aparecem em nenhum emparelhamento estável) são removidas resultando num grafo com algumas propriedades especiais. Apresentamos a seguir uma descrição em alto nível do algoritmo.

Considere que G é o grafo de preferências dado como entrada. Defina $G' := G$ e um conjunto F, denominado como o conjunto dos **vértices livres** de G'. Inicialmente, esse conjunto corresponde a todos os vértices de G'. Além disso, considere um conjunto S de pares ordenados de vértices de G'. Se $(v, w) \in S$, então diremos que v está **semi-comprometido** com w. Enquanto F apresentar vértices de grau não-nulo em G' o algoritmo procede realizando os seguintes passos em sequência:

1. Remove um vértice v de F de grau não-nulo em G'.

2. Considere que w é o vizinho preferido de v em G'. v passa a ficar semi-comprometido com w, isto é, fazemos $S := S \cup \{(v, w)\}$.

3. Se algum vértice $u \neq v$ estava semi-comprometido com w, (u, w) é removido de S e u é adicionado de volta a F.

4. Todas as arestas wx em G tais que $v >_w x$ são removidas de G.

Note que quando um par (u, w) é removido de S no passo 3, a aresta correspondente uw certamente é removida no passo 4. Isso garante que tal par (u, w) não será considerado novamente. Assim, como a cada execução dos passos acima, um novo par (v, w) é considerado no passo 2, podemos afirmar que o algoritmo para em no máximo $2m$ execuções do laço acima, onde m é o número de arestas de G. Deste modo, em algum instante, ou $F = \emptyset$ ou todos os vértices presentes em F são isolados em G.

Finalmente, o algoritmo procede removendo os vértices isolados de G'. A saída do algoritmo é o grafo G'. Abaixo temos uma descrição formal do algoritmo.

Algoritmo 3: Primeira etapa do algoritmo de Irving.

Entrada: Um grafo de preferências $G = (V, E, L)$
Saída: Um subgrafo com preferências G' de G
1 **início**
2   Faça $F := V$, $S := \emptyset$ e $G' := G$
3   **enquanto** *existe* $v \in F$ *não isolado em* G' **faça**
4   Seja w o vizinho preferido de v em G'
5   **se** *existe* $u \in V$ *tal que* $(u, w) \in S$ **então**
6       $S := S \setminus \{(u, w)\}$
7       $F := F \cup \{u\}$
8     $S := S \cup \{(v, w)\}$
9   **para cada** $x \in V$ *vizinho de* w *em* G' *tal que* $x <_w v$ **faça**
10       $G' := G' - \{xw\}$
11     $V(G') := \{v \in V(G') : v$ não é isolado em $G'\}$
12   **retorna** G'

Na discussão abaixo, considere que F^* e S^* são os estados de F e S ao final da execução do algoritmo.

O grafo produzido pelo algoritmo acima ao aplicá-lo em um grafo de preferências G será denotado por G_1. Uma observação importante é que ao longo da execução do loop principal temos a seguinte invariante para todo $v, w \in V$: $(v, w) \in S \implies vw \in E(G')$. De fato, supondo que em algum momento durante a execução do algoritmo tivéssemos $(v, w) \in S$ tal que $vw \notin E(G')$, a remoção de tal vw só poderia ter sido devido algum vértice u ter ficado semi-comprometido com v tal que $w <_v u$. Isso, no entanto, entraria em contradição com o fato de w ter sido em algum instante anterior o vizinho preferido de v em G' (já que ele ficou semi-comprometido com w).

Outra observação útil é a de que se $v \in V(G_1)$ então existe vértice u tal que u está semi-comprometido com v ao final do algoritmo. De fato, sendo $v \in V(G_1)$ segue que v não foi removido na linha 11 e, portanto, $v \notin F^*$, donde conclui-se que v está semi-comprometido com algum vértice w de G, isto é, $(v, w) \in S^*$. Assim, $vw \in E(G_1)$ (pela observação do parágrafo anterior) e $w \in V(G_1)$ e, de modo análogo, concluímos que existe $u_0 \in V(G_1)$ tal que $(w, u_0) \in S^*$. Se $u_0 = v$, acabou. Caso contrário, existe u_1 tal que $(u_0, u_1) \in S^*$. Se $u_1 = v$, acabou. Note que $u_1 \notin \{u_0, w\}$ (já que cada vértice só pode estar semi-comprometido com no máximo um vértice). Como o número de vértices é finito, procedendo dessa forma, encontraremos u_i tal que $v = u_i$ e $(u_{i-1}, u_i) \in S^*$ e assim, segue o requerido.

Antes de enunciarmos algumas propriedades de G_1 convém introduzir a seguinte terminologia: Dado um vértice v de um grafo de preferências G, $f_G(v)$ é o vizinho de v preferido em G; $s_G(v)$ é o segundo vizinho preferido de v em G e $l_G(v)$ é o vizinho menos preferido de v em G. Note que $f_G(v)$ e $l_G(v)$ não estão bem definidos quando v é isolado e $s_G(v)$ não está bem quando v tem grau menor que 2. O subscrito G pode ser omitido quando fica claro pelo contexto o grafo de preferências que está sendo referido.

Lema 5. *1. $w = f_{G_1}(v)$ se, e somente se, $v = l_{G_1}(w)$.*

2. Sejam $v, w \in V(G_1)$ tais que $vw \in E(G)$. Então vw não é aresta de G_1 se, e somente se, v prefere $l_{G_1}(v)$ a w em G ou w prefere $l_{G_1}(w)$ a v em G.

Demonstração. 1. Vale notar que todo vértice v de $V(G_1)$ é não isolado e, portanto, $f_{G_1}(v)$ e $l_{G_1}(v)$ estão bem definidos. Inicialmente, vamos provar que $v = l_{G_1}(w)$ se, e somente se, $(v, w) \in S^*$. De fato, se $(v, w) \in S$ ao final do algoritmo, então, pela descrição do algoritmo, todas as arestas wx tais que $v >_w x$ foram removidas de G_1. Além disso, como $(v, w) \in S^*$ então $vw \in E(G_1)$. Daí, $v = l_{G_1}(w)$. Para provar a recíproca, suponha que $v = l_{G_1}(w)$. Isso implica, em particular, que $vw \in E(G_1)$. Assim, w não é isolado em G_1 e todo vértice não isolado em G_1 possui um vértice u tal que $(u, w) \in S^*$ (fato observado acima). Assim, $uw \in E(G_1)$ e todas as arestas wx tais que $x <_w u$ foram removidas, donde $u = l_{G_1}(w) = v$ e a conclusão se segue.

Resta-nos provar que $w = f_{G_1}(v)$ se, e somente se, $(v, w) \in S^*$. De fato, se $(v, w) \in S^*$, então $vw \in E(G_1)$ e, pela descrição do algoritmo, segue que w é o vizinho preferido de v em G_1. Reciprocamente, suponha que $w = f_{G_1}(v)$. Assim, $vw \in E(G_1)$ e, portanto, v não é isolado em G_1. Disso vem que $v \notin F^*$ e, logo, existe vértice u tal que $(v, u) \in S^*$ e, assim, fica claro que u é o vértice menos preferido de v em G_1. Logo, $w = u$ e o resultado segue.

2. Se vw não é aresta de G_1, pela descrição do algoritmo, segue que vw foi removido ou devido a algum vértice u ter ficado semi-comprometido com v e $u >_v w$ (I) ou devido a algum vértice u' ter ficado semi-comprometido com w tal que $u' >_w v$ (II). Suponha (I) (a prova para o caso (II) é análoga). Assim, temos que vx foi removido para todos os vértices x tal que $u >_v x$ e, portanto, $w <_v u \leq_v l_{G_1}(v)$, donde, por transitividade, $w <_v l_{G_1}(v)$, como queríamos.

Reciprocamente, suponha, sem perda de generalidade, que $u := l_{G_1}(v) <_v w$ e, pela prova do item anterior, u esteve comprometido com v em algum momento do algoritmo, implicando que todas as arestas vx tal que $x <_v u$ foram removidas de G e, em particular, a aresta vw.

□

O lema abaixo expõe informações que podem ser obtidas de G_1 sobre emparelhamentos estáveis em G.

Lema 6. *1. Se vw é uma aresta de G que não é uma aresta de G_1, então vw não é estável em G.*

2. Se vw é uma aresta de G e v e w não são vértices de G_1, então G não apresenta emparelhamentos estáveis.

Demonstração. 1. Seja $vw \in E(G)$ tal que $vw \notin E(G_1)$. Suponha, por absurdo, que exista um emparelhamento M estável em G tal que $vw \in M$. Pelo item 2 do lema 5, ou v prefere $l_{G_1}(v)$ a w (I) ou w prefere $l_{G_1}(w)$ a v (II). Se (I), pelo item 1 do lema anterior, $u := l_{G_1}(v) \implies f_{G_1}(u) = v$ e, portanto, u prefere v a w, donde uv bloqueia M.

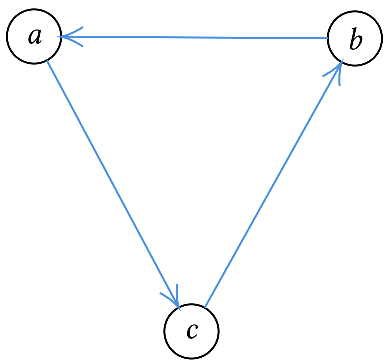
Se (II), de modo análogo, concluiríamos que $l_{G_1}(w)w$ bloqueia M. Assim, vw não é estável.

2. Suponha que vw é uma aresta de G tal que v e w não são vértices de G_1. Além disso, suponha, por absurdo, que G apresenta um emparelhamento estável M. Como v e w não pertencem a $V(G_1)$, pelo item anterior, segue que v e w não são cobertos por M. Isso implica que $M \cup \{vw\}$ é um emparelhamento, e, portanto, M não é maximal, o que é uma contradição, já que todo emparelhamento estável é maximal e M é, por hipótese, estável.

□

Note que há casos em que G_1 já nos dá informações suficientes para determinar rapidamente se G possui um emparelhamento estável. Um desses casos corresponde ao item 2 do lema anterior, onde chegamos à conclusão que G não apresenta emparelhamentos estáveis. Outro seria quando cada vértice de G_1 apresenta grau 1 (relembre que G_1 não apresenta vértices isolados) e, assim, G_1 se reduziria a um emparelhamento estável, ou seja, $E(G_1)$ seria um emparelhamento estável. De fato, suponha que esse seja o caso, e seja vw uma aresta de G tal que $vw \notin E(G_1)$. Pelo item 2 do lema 5 vw não bloquearia $E(G_1)$.

Infelizmente, após a etapa 1 nem sempre estaremos em algum dos casos anteriores, como nos mostra exemplo da figura abaixo. Chamaremos tais casos de **casos degenerados**.



a : c b
b : a c
c : b a

Figura 3.2: *A figura acima representa o grafo produzido ao aplicar o pré-processamento da etapa 1 do algoritmo de Irving ao grafo G representado na figura 3.1. Os arcos coloridos de azul representam o estado de S ao final do algoritmo (Note que S induz um grafo dirigido nos vértices de G). Assim, vemos que $G_1 = G$. Note que cada vértice de G_1 apresenta grau 2.*

Dada a importância dos grafos produzidos pela etapa 1 serem relevantes para as discussões que vem a seguir, introduzimos a seguir o conceito de subgrafo **estável** de um grafo de preferências.

Dado um grafo de preferências G, um subgrafo de preferências G' é dito estável (com respeito a G):

1. Para quaisquer $v, w \in V(G')$: $v = l_{G'}(w)$ se, e somente, se $w = f_{G'}(v)$.
2. Para quaisquer $v, w \in V(G')$ tais que $vw \in E(G)$: $vw \notin E(G')$ se, e somente, se v prefere $l_{G'}(v)$ a w ou w prefere $l_{G'}(w)$ a v.

3. Não existem vértices $v, w \in V(G)$ tais que $vw \in E(G)$ e $v, w \notin V(G')$.
4. Não existem vértices isolados em G'.

Note que se G_1 não se encontra em nenhum dos casos degenerados, ele é estável. O lema abaixo enumera propriedades interessantes de subgrafos estáveis que serão úteis na discussão da seção seguinte.

Lema 7. *Sejam G um grafo de preferências e G', G'' subgrafos estáveis de G. Então:*

1. *Se M é um emparelhamento de G contido em G', então toda aresta vw de G ausente em G' não bloqueia M.*
2. *Se todo vértice de G' apresenta grau no máximo 1, então G' se reduz a um emparelhamento estável de G, isto é, $E(G')$ é um emparelhamento estável de G.*
3. *Se $V(G') = V(G'')$ e, para todo vértice $v \in V(G')(= V(G''))$, $f_{G'}(v) = f_{G''}(v)$, então $G' = G''$.*

Demonstração. 1. Tal fato segue diretamente dos itens 2 e 3 da definição de subgrafo estável.

2. Pelo item anterior, $E(G')$ é um emparelhamento que não é bloqueado por nenhuma aresta fora de $E(G')$ e obtemos o requerido.
3. Suponha que $f_{G'}(v) = f_{G''}(v)$ para todo $v \in V(G')$. Fixe um $v \in V(G')$ arbitrário e considere $u_1 := l_{G'}(v)$ e $u_2 := l_{G''}(v)$. Pelo item 1 da definição de subgrafo estável e pela hipótese anterior, $f_{G''}(u_1) = f_{G'}(u_1) = v$ e, novamente pelo item 1 da definição de subgrafo estável, conclui-se que $u_1 = l_{G''}(v) = u_2$. Assim provamos que $l_{G'}(u) = l_{G''}(u)$ para todo $u \in V(G')$ e, pelo item 2 da definição de subgrafo estável, segue imediatamente que $E(G') = E(G'')$ e obtemos o requerido.

□

3.1.2 Teorema dos hospitais rurais generalizado

Relembre que G_1 é o grafo de preferências obtido após aplicação da etapa 1 em um grafo de preferências G. Assim, pelo item 1 do lema 6, segue imediatamente que todo vértice de v de $V(G) \setminus V(G_1)$ não é estável. Agora, com relação aos vértices de $V(G_1)$, podemos tirar alguma conclusão geral que relaciona tal conjunto com os emparelhamentos estáveis de G (caso existam)? A resposta é positiva(!). Segue abaixo uma generalização do Teorema dos Hospitais Rurais.

Teorema 9 (hospitais rurais generalizado)**.** *Seja $G = (V, E, L)$ um grafo de preferências que apresenta emparelhamentos estáveis. Então qualquer vértice de G_1 é coberto por cada um dos emparelhamentos estáveis de G. Além disso, todo vértice de G fora de $V(G_1)$ não é estável.*

Demonstração. Seja $v \in V(G_1)$, então foi observado anteriormente que nesse caso existe $u \in V(G_1)$ tal que $(u, v) \in S^*$, implicando que $v = f_{G_1}(u)$ (I). Seja M um emparelhamento de G tal que v não é coberto por M. Sabemos, pelo item 1 do lema 6, que M está contido em $E(G_1)$ (II). Assim, ou u não é coberto por M, caso em que claramente vu bloqueia M, ou u é coberto por M, donde $M(u) \in V(G_1)$, por (II), e, por (I), $M(u) <_u v$, implicando que uv bloqueia M.

A segunda afirmação do enunciado segue diretamente do item 1 do lema 6. □

3.1.3 Preliminares para a segunda etapa

Antes de descrevermos a segunda etapa propriamente dita, introduziremos um conceito que será de imensa utilidade para a discussão que vem a seguir. Seja $G = (V, E, L)$ um grafo de preferências e G' um subgrafo estável de G. Uma sequência $\rho = (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{r-1}, y_{r-1})$ tal que $y_i = f_{G'}(x_i)$ e $y_{(i+1 \bmod r)} = s_{G'}(x_i)$, para todo $i \in \{0, ..., r-1\}$, é dita uma **rotação** exposta em G'. Definimos $X_\rho := \{x_0, ..., x_{r-1}\}$ e $Y_\rho := \{y_0, ..., y_{r-1}\}$. Como de praxe, o subscrito ρ pode ser omitido quando estiver subentendido no contexto. Para evitar carregar a notação, quando estivermos nos referindo a um índice de um elemento de X_ρ ou Y_ρ considere que ele está sendo tomado módulo r. Assim, por exemplo, escrevemos x_{i+1} e y_{i-1} nos lugares de, respectivamente, $x_{(i+1 \bmod r)}$ e $y_{(i-1 \bmod r)}$.

Vale notar a natureza cíclica da rotação, de modo, que diremos que duas rotações são iguais se as sequências que as definem são iguais a menos de rotações. Mais precisamente, $\alpha = (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{r-1}, y_{r-1})$ e $\beta = (x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), ..., (x'_{t-1}, y'_{t-1})$ expostas em G' são iguais quando $r = t$ e existir um $k \in \{0, .., r-1\}$ tal que $x_{i+k} = x'_i$ e $y_{i+k} = y'_i$ para todo $i \in \{0, ..., r-1\}$. O lema a seguir nos dá uma maneira mais simples de verificar se duas rotações são iguais. Note que quando falamos que uma rotação está completamente determinada, estamos dizendo que ela está determinada a menos de rotações.

Lema 8. *Se α e β são rotações distintas expostas em um subgrafo estável G' de um grafo de preferências G, então $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ e $Y_\alpha \cap Y_\beta = \emptyset$.*

Demonstração. Para provar o enunciado, basta provar que uma rotação ρ está completamente determinada por cada um dos seus x_i's e y_i's. De fato, note que $f_{G'}(x_i) = y_i = s_{G'}(x_{i-1})$ e, assim, $x_i = l_{G'}(s_{G'}(x_{i-1}))$. Assim, dado x_i para algum i e, visto que $y_i = f'_G(x_i)$ para todo i, segue que ρ está completamente determinada. Note que $x_i = l_{G'}(y_i)$ para todo i e, logo, segue que, dado y_i, ρ está completamente determinada. □

Assim, para verificar que duas rotações α e β são iguais basta verificar se X_α e X_β (ou Y_α e Y_β) apresentam algum elemento em comum.

Encontrar rotações expostas em subgrafos estáveis é de suma importância para a segunda etapa do algoritmo de Irving. Nesse sentido, O lema a seguir nos garante a existência de rotações expostas em subgrafos estáveis que não se reduzem a um emparelhamento.

Lema 9. *Seja G' um subgrafo estável de um grafo de preferências G. Se existe um vértice $v \in V(G')$ tal que $g_{G'}(v) \geq 2$, então existe uma rotação exposta em G'.*

Demonstração. Suponha que exista um vértice v tal que $g_{G'}(v) \geq 2$. Seja $S(G')$ o conjunto dos vértices de G' tal que $g_{G'}(v) \geq 2$. Provemos que, dado $u \in V(G)$, $l_{G'}(s_{G'}(u)) \neq u$ e $l_{G'}(s_{G'}(u)) \in S(G')$. De fato, se $l_{G'}(s_{G'}(u)) = u$, teríamos $s_{G'}(u) = f_{G'}(u)$, o que é um absurdo.

Para concluir a veracidade da segunda afirmação, basta notar que se $w \in V(G')$ é tal que $g_{G'}(w) = 1$, então seu único vizinho $w' \in V(G')$ é tal que $w' = f_{G'}(w) = l_{G'}(w)$ e, portanto, pela estabilidade de G', segue que $w = l_{G'}(w') = f_{G'}(w')$, implicando que $g_{G'}(w') = 1$. Logo, dado que $u \in S(G')$ e que G' não apresenta vértices isolados, segue que $s_{G'}(u) \in S(G')$, que por sua vez, implica $l_{G'}(s_{G'}(u)) \in S(G')$, como não há vértices isolados em G', segue que $l_{G'}(s_{G'}(u)) \in S(G')$, como queríamos demonstrar.

Assim está bem definido o grafo direcionado $G(S(G'))$ definido a seguir. $V(G(S(G'))) := S(G')$ e para cada $u \in S(G')$ tem-se um arco de u para $l_{G'}(s_{G'}(u)) \in S(G')$. Desta forma, cada nó de $G(S(G'))$ apresenta grau de saída exatamente 1 e, portanto, existe um circuito simples $C = (x_0, x_1, ..., x_{r-1}, x_0)$.

Finalmente, resta-nos provar que $\rho := (x_0, f_{G'}(x_0)), (x_1, f_{G'}(x_1)), ..., (x_{r-1}, f_{G'}(x_{r-1}))$ é uma rotação exposta em G'. Tal afirmação segue diretamente do fato que $x_i = l_{G'}(s_{G'}(x_{i-1}))$ se, e somente se, $f_{G'}(x_i) = s_{G'}(x_{i-1})$. □

Note que a demonstração do lema acima nos dá um algoritmo para encontrar uma rotação exposta em G': Comece com $P := (u_0)$, onde u_0 é um vértice arbitrário de $S(G')$, e, enquanto P não contiver vértices repetidos, acrescente ao final de P o vizinho do até então vértice final de P. Ao final, P será da forma $P = (u_0, u_1, ..., u_k, ..., , u_{k+r}, u_k)$ e, assim, $(u_k, ..., u_{k+r-1}, u_k)$ será um circuito e $\rho = (u_k, f_{G'}(u_k)), ..., (u_{k+r-1}, f_{G'}(u_{k+r-1}))$ é uma rotação exposta em G'.

Denotamos por $G' \setminus \rho$ o subgrafo obtido ao se remover de G' as arestas do conjunto $E(\rho) := \bigcup_{i=1}^{r} \{ay_i : x_{i-1} >_{y_i} a\}$. Dizemos que $G' \setminus \rho$ é G' após a **remoção da rotação** ρ.

O lema abaixo nos dá uma caracterização de $G' \setminus \rho$ quando a remoção de ρ nos conduz a um subgrafo estável de G (isto é, quando $G' \setminus \rho$ não possui vértices isolados).

Lema 10. *Seja G' um subgrafo estável de um grafo de preferências G e $\rho = (x_0, y_0), ..., (x_{r-1}, y_{r-1})$ uma rotação exposta em G'. Se $G' \setminus \rho$ é tal que não apresenta vértices isolados, temos:*

1. *$f_{G' \setminus \rho}(x_i) = y_{i+1}$ para todo $i \in \{0, ..., r-1\}$.*
2. *$l_{G' \setminus \rho}(y_i) = x_{i-1}$ para todo $i \in \{0, ..., r-1\}$.*
3. *Para todo $x \in V(G') \setminus X_\rho$, $f_{G' \setminus \rho}(x) = f_{G'}(x)$.*
4. *Para todo $y \in V(G') \setminus Y_\rho$, $l_{G' \setminus \rho}(y) = l_{G'}(y)$.*
5. *$G' \setminus \rho$ é um subgrafo estável de G.*

Demonstração. 1. Note que a remoção de ρ remove, em particular, as arestas $x_i y_i$ com $i \in \{0, ..., r-1\}$. Se para algum i, $x_i y_{i+1}$ fosse removido, seria devido a existência de algum j tal que $y_j = x_i$ e $y_{i+1} <_{x_i} x_{j-1}$. Nesse caso, como cada vizinho $u \neq y_i$ de x_i é tal que $u \leq_{x_i} y_{i+1} <_{x_i} x_{j-1}$ (pois $y_{i+1} = s_{G'}(x_i)$ e $y_i = f_{G'}(x_i)$), concluiríamos que todos os vizinhos de x_i foram removidos, o que contradiz a hipótese de não haverem vértices isolados em $G' \setminus \rho$. Assim, segue o requerido.

2. Como observado no item anterior, ao se remover ρ, remove-se as arestas $x_i y_i$ com $i \in \{0, ..., r-1\}$. Além disso, pela definição de remoção de rotação, dado i, todo vizinho u de y_i tal que $u <_{y_i} x_{i-1}$ são removidos. Assim, se $x_{i-1}y_i$ fosse removido, seria devido a existência de algum j tal que $y_j = x_{i-1}$ e, por um argumento análogo ao do item 1 concluiríamos que x_{i-1} é isolado em $G' \setminus \rho$, o que é uma contradição. Assim, segue o enunciado.

3. Seja $x \in V(G')$ tal que $x \notin X_\rho$. Logo, $f_{G'}(x) \notin Y_\rho$. Além disso, para que $xf_{G'}(x)$ fosse removido, deveríamos ter um j tal que $y_j = x$ e $f_{G'}(x) <_x x_{j-1}$ o que contradiria a definição de $f_{G'}(x)$.

4. Seja $y \in V(G')$ tal que $y \notin Y_\rho$. Logo, $l_{G'}(y) \notin X_\rho$. Assim, fazendo $x := l_{G'}(y) \notin X_\rho$, temos que $y = f_{G'}(x) \notin Y_\rho$ e, pelo item anterior, $xf_{G'}(x) = yl_{G'}(y)$ não é removido de de G'.

5. Note que, como $V(G' \setminus \rho) = V(G')$ e G' é estável, $G' \setminus \rho$ satisfaz trivialmente a condição 3 da definição de subgrafo estável. Além disso, como $G' \setminus \rho$ não apresenta vértices isolados, a condição 4 é automaticamente satisfeita. A condição 1 segue dos itens anteriores.

   Resta-nos provar que a condição 2 de subgrafo estável é satisfeita por $G \setminus \rho$. Para isso, tomemos uma aresta $xy \in E(G)$ tal que $x, y \in V(G' \setminus \rho) = V(G')$. Se $xy \notin E(G')$, então o resultado segue imediatamente do fato que $l_{G' \setminus \rho}(v) \leq_v l_{G'}(v)$ (já que $G' \setminus \rho$ é obtido de G' removendo-se arestas). Suponha então que $xy \in E(G')$. Assim, xy é removido de G' se, e somente se, $x = y_j$ e $y <_x x_{j-1} = l_{G' \setminus \rho}(x)$ para algum j (I) ou $y = y_i$ e $x <_y x_{i-1} = l_{G' \setminus \rho}(y)$ para algum i (II). Isso prova o requerido.

□

Os lemas expostos a seguir são de fundamental importância para prova da corretude da etapa 2.

Lema 11. *Seja G' um subgrafo estável de um grafo de preferências G e ρ uma rotação exposta em G'. Se M é um emparelhamento estável de G contido em G' e existe $x \in X_\rho$ tal que $M(x) \neq f_{G'}(x)$, então M está contido em $G' \setminus \rho$.*

Demonstração. Suponha que exista um M definido conforme o enunciado e suponha que $\rho := (x_0, y_0), ..., (x_{r-1}, y_{r-1})$. Pelo caráter cíclico de uma rotação, podemos supor, sem perda de generalidade, que $M(x_0) \neq f_{G'}(x_0)$. Então, temos dois casos, a saber: $M(x_0) = s_{G'}(x_0)$ (I) ou $M(x_0) <_{x_0} s_{G'}(x_0) = f_{G'}(x_1) = y_1$ (II). Se (I), temos que $M(x_0) = y_1$ e, como M é um emparelhamento, devemos ter $M(x_1) \neq M(x_0) = y_1 = f_{G'}(x_1)$. Se (II), dado que $x_0 y_1$ não bloqueia M (pois M é estável), devemos ter $x_0 <_{y_1} M(y_1)$ e, visto que $x_1 = l_{G'}(y_1) <_{y_1} x_0$, segue que $x_1 \neq M(y_1)$, isto é, $M(x_1) \neq y_1 = f_{G'}(x_1)$. Por indução, é possível provar que $M(x_i) \neq f_{G'}(x_i)$ para todo $i \in \{0, ..., r-1\}$.

Agora, suponha, por absurdo, que algum $xM(x) \in E(G')$ é removido ao se remover ρ de G'. Pela definição de remoção de rotação, para que isso tenha ocorrido, existe algum j tal que $x = y_j$ e $M(x) <_x x_{j-1}$ (I) ou algum j tal que $M(x) = y_j$ e $x <_{M(x)} x_{j-1}$ (II). No caso (I), pela estabilidade de M, obtemos que $s_{G'}(x_{j-1}) = y_j = x <_{x_{j-1}} M(x_{j-1})$, donde vem que $M(x_{j-1}) = f_{G'}(x_{j-1})$, o que contradiz a conclusão do parágrafo anterior. Supondo (II), de modo inteiramente análogo ao caso anterior, chegamos a uma contradição. Portanto, nenhuma aresta de M é removida ao se remover ρ de G' e, portanto, M está contido em $G' \setminus \rho$. □

Lema 12. *Seja G' um subgrafo estável de um grafo de preferências G e ρ uma rotação exposta em G'. Se G' contém algum emparelhamento estável de G, então $G' \setminus \rho$ contém algum emparelhamento estável de G.*

Demonstração. Suponha que G' contenha algum emparelhamento estável e seja M um emparelhamento estável de G contido em G'. Inicialmente, veja que, como M é um emparelhamento estável contido em G', pelo Teorema 9, $V(M) = V(G_1)$. Por outro lado, pelo item 4 do lema 7, $V(G') \subset V(G_1) = V(M) \subset V(G')$, donde $V(G') = V(M) = V(G_1)$. Considere que $\rho := (x_0, y_0), ..., (x_{r-1}, y_{r-1})$. Se $M(x_i) \neq f_{G'}(x_i)$ para algum i, então, pelo lema anterior, M está contido em $G' \setminus \rho$ e obtemos o requerido. Suponha então que $M(x_i) = f_{G'}(x_i) = y_i$ para todo i. Então, pelo lema 9, segue que $x_i y_i \notin G' \setminus \rho$ para todo i. Note que $xM(x) \in E(G')$ só é removido quando $xM(x) = x_i y_i$ para algum i (I). De fato, para que $xM(x) \in E(G')$ fosse removido, deveria existir j tal que $x = y_j$ (implicando que $M(x) = M(y_j) = x_j$) ou existir j tal que $M(x) = y_j$ (implicando que $x_j = M(y_j) = x$).

Assim, considere $M' := (M \setminus \{x_i y_i : i \in \{0, ..., r-1\}\}) \cup \{x_i y_{i+1} : i \in \{0, ..., r-1\}$. Note que se $x_i y_{i+1} \notin G' \setminus \rho$ para algum i, existiria j tal que $x_i = y_j = f_{G'}(x_j)$ e $y_{i+1} <_{x_i} x_{j-1}$, donde $f_{G'}(x_i) = y_i = M(x_i) = M(y_j) = x_j = l_{G'}(x_i)$, implicando que o grau de x_i é 1 em G', o que é um absurdo. Logo, M' está contido em $G \setminus \rho$.

Provemos agora que M' se trata de um emparelhamento. Note que $M \setminus \{x_i y_i : i \in \{0, ..., r-1\}\}$ não pode cobrir nenhum vértice de X_ρ ou Y_ρ (caso contrário, M não seria um emparelhamento) e, portanto, se $R := \{x_i y_{i+1} : i \in \{0, ..., r-1\}\}$ é um emparelhamento, M' também o é. Suponha, por absurdo, que $x_i y_{i+1}$ e $x_j y_{j+1}$, onde i é distinto de j módulo r, possuem algum extremo em comum. Nesse caso, temos as seguintes possibilidades: $x_i = x_j$ (implicaria que M não é emparelhamento); $y_{i+1} = y_{j+1}$ (idem); $x_i = y_{j+1}$ ($x_i y_i$ e $x_{j+1} y_{j+1}$ teriam algum extremo em comum, donde $j + 1 = i$ (módulo r)e $x_i = y_i = M(x_i)$, o que é um absurdo); $x_{j+1} = y_i$ (de modo análogo ao caso anterior, chegaríamos a uma contradição). Assim, M' é um emparelhamento. Note que $V(M') = V(M) = V(G')$.

Resta-nos provar que M' é estável. De fato, como $V(M') = V(G') = V(G' \setminus \rho)$, temos, em particular, que $G \setminus \rho$ não contém vértices isolados e, portanto, é estável (item 5 do lema 10). Assim, pelo item 1 do lema 7, nenhuma aresta fora de $E(G \setminus \rho)$ bloqueia M'. Tome então uma aresta arbitrária $uv \in E(G' \setminus \rho)$ e suponha, por absurdo, que uv bloqueia M'. Como $y_{i+1} = f_{G' \setminus \rho}(x_i)$ para todo i, segue que x_i não pode ser extremo de uma aresta de G' que bloqueia M' e, logo, $u, v \notin X_\rho$. Temos 3 casos a considerar:

- (ambos os extremos de uv não pertencem a Y_ρ): uma vez que $M(u) = M'(u)$ e $M(v) = M'(v)$, isso implicaria que uv bloqueia M, o que contradiz a estabilidade de M.
- (um dos extremos é elemento de Y_ρ e o outro não): Nesse caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u = y_j$ para algum j e $v \notin Y_\rho$. Assim, teríamos que $u >_v M'(v) = M(v)$ e $v >_u M'(u) = x_{j-1} >_u l_{G'}(y_j) = x_j = M(u)$, implicando que uv bloqueia M, o que é uma contradição.

- (ambos os extremos pertencem a Y_ρ): Nesse caso, $u = y_j$ e $v = y_i$ para i, j distintos módulo r e assim, $y_i >_u M'(y_j) = x_{j-1} >_u l_{G'}(y_j) = x_j$ e $y_j >_v M'(y_i) = x_{i-1} >_v x_i$, implicando que uv bloqueia M, o que é uma contradição.

□

3.1.4 Segunda etapa

Com os resultados anteriores, estamos em plenas condições de provar a corretude da segunda etapa, descrita a seguir. Se $G' := G_1$ se encontra em alguns dos casos degenerados discutidos anteriormente, ou devolvemos $E(G')$ (no caso em que cada vértice de G' tem grau exatamente 1) ou acusamos que G' apresenta emparelhamento estáveis. Caso contrário, G' é estável e possui algum vértice de grau 2. Assim, pelo lema 9, existe uma rotação exposta em G' e, como observado anteriormente, a prova do lema 9 nos dá um algoritmo para uma encontrar uma tal rotação ρ. O algoritmo prossegue removendo rotações de G' até que nos deparamos com um dos casos abaixo:

- (Todos os vértices de G' grau exatamente 1): Nesse caso, o algoritmo se encerra devolvendo $E(G')$.
- (G' apresenta algum vértice isolado): Nesse caso, o algoritmo se encerra acusando que G não apresenta emparelhamentos estáveis.

Algoritmo 4: Segunda etapa do algoritmo de Irving.

Entrada: Um grafo de preferências $G = (V, E, L)$ e G_1
Saída: Um emparelhamento estável de G ou $\emptyset$ indicando que G não possui emparelhamentos estáveis

1 **início**
2   **se** *existe* $v, w \notin V(G_1)$ *tais que* $vw \in E(G)$ **então**
3   **retorna** $\emptyset$
4   **se** *para todo* $v \in V(G_1)$, $g_{G_1}(v) = 1$ **então**
5   **retorna** $E(G_1)$
6   Faça $G' := G_1$
7   **repita**
8   Tome uma rotação ρ exposta em G'
9         $G' := G' \setminus \rho$
10   **até** *existe algum vértice isolado em* G' *ou* $g_{G'}(v) \leq 1$ *para todo* $v \in V(G')$
11   **se** *existe vértice isolado em* G' **então**
12   **retorna** $\emptyset$
13   **retorna** $E(G')$

A fim de verificar a corretude da segunda etapa, observe que o laço da linha 7 possui a seguinte invariante: G' é um subgrafo de G obtido após a remoção de uma rotação exposta de um subgrafo estável (I). De fato, imediatamente após a primeira iteração do laço, G' é o grafo obtido após a remoção de uma rotação exposta em G_1 (Vale observar que, como G_1 não se encontra em nenhum caso degenerado, G_1 é estável e apresenta algum vértice de grau maior ou igual a 2) e temos a veracidade de (I). Suponha agora que (I) e a condição do laço são verdadeiras logo após a j-ésima iteração, para um j arbitrário. Provemos que (I) será verdadeira imediatamente após a $(j+1)$-ésima iteração do laço. De fato, imediatamente antes da linha 8 da $(j+1)$-ésima, por (I) e pela veracidade da condição do laço, segue que G' é um subgrafo estável de G e o lema 10 nos garante a existência de uma rotação exposta em G', portanto o ρ da linha 8 está bem definido. Assim, a linha 9 prossegue removendo ρ, donde segue a veracidade de (I) logo após a $(j+1)$-ésima iteração. Demonstramos então que (I) se trata de uma invariante de laço.

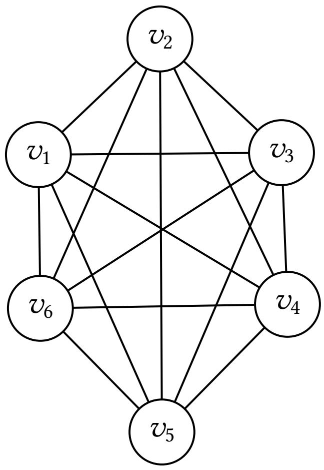
Vale notar que em algum momento a condição do laço da linha 7 será verdadeira, já que, ao se remover uma rotação exposta, removemos uma quantidade positiva de arestas, de modo que há um decréscimo do grau de alguns vértices.

Assim, logo antes da linha 11, vale a invariante (I) e a condição do laço da linha 7. Se algum $v \in V(G') = V(G_1)$ é isolado, pelo Teorema dos Hospitais Rurais Generalizado, G' não apresenta emparelhamentos estáveis (com respeito a G). Portanto, usando a contrapositiva do lema 12, segue que G não apresenta emparelhamentos estáveis e a linha 12 está justificada.

No caso em que a condição da linha 11 é falsa, segue que $E(G')$ é um emparelhamento, o qual é estável pois G' é subgrafo estável de G ((I) e item 1 do lema 7). Assim, na linha 13, o algoritmo devolve um emparelhamento estável.

3.1.5 Exemplo de execução do algoritmo de Irving

Vamos descrever a execução do algoritmo para o grafo de preferências G representado na figura abaixo. Escrevemos $x \longrightarrow y$ para indicar que o vértice x fez um pedido para o vértice y.



$$
\begin{array}{lcl}
v_1 & : & v_6\ v_3\ v_4\ v_5\ v_2 \\
v_2 & : & v_4\ v_1\ v_3\ v_6\ v_5 \\
v_3 & : & v_4\ v_5\ v_6\ v_2\ v_1 \\
v_4 & : & v_5\ v_3\ v_6\ v_2\ v_1 \\
v_5 & : & v_6\ v_1\ v_3\ v_2\ v_4 \\
v_6 & : & v_4\ v_2\ v_5\ v_1\ v_3
\end{array}
$$

Figura 3.3

Etapa 1

Uma possível execução do algoritmo é a seguinte.

- $v_1 \longrightarrow v_6$. A aresta v_3v_6 é removida. $S = \{(v_1, v_6)\}$ e $F = V \setminus \{v_1\}$.

- $v_2 \longrightarrow v_4$. A aresta v_1v_4 é removida. $S = \{(v_1, v_6), (v_2, v_4)\}$ e $F = V \setminus \{v_1, v_2\}$.

- $v_3 \longrightarrow v_4$. As arestas v_2v_4 e v_6v_4 são removidas. $S = \{v_1, v_6), (v_3, v_4)\}$ e $F = V \setminus \{v_1, v_3\}$. Note que v_2 voltou a ser um vértice livre.

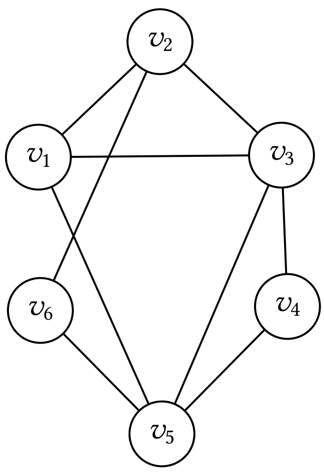
- $v_2 \longrightarrow v_1$. Nenhuma aresta é removida. $S = \{(v_1, v_6), (v_3, v_4), (v_2, v_1\}$ e $F = \{v_4, v_5, v_6\}$.

- $v_4 \longrightarrow v_5$. Nenhuma aresta é removida. $S = \{v_1, v_6), (v_3, v_4), (v_2, v_1), (v_4, v_5)\}$ e $F = \{v_5, v_6\}$.

- $v_5 \longrightarrow v_6$. A aresta v_1v_6 é removida. $S = \{v_1, v_6), (v_3, v_4), (v_2, v_1), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$ e $F = \{v_6\}$.

- $v_6 \longrightarrow v_2$. A aresta v_5v_2 é removida. $S = \{v_1, v_6), (v_3, v_4), (v_2, v_1), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$ e $F = \emptyset$.

- Como $F = \emptyset$, o loop principal se encerra devolvendo G_1 (representado na figura abaixo).

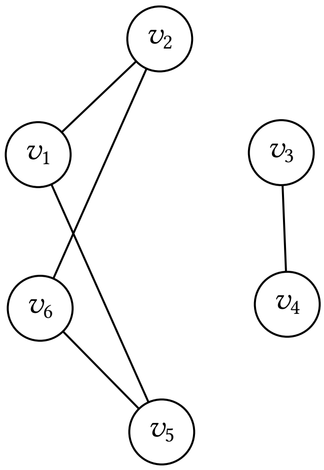


v_1 : v_3 v_5 v_2
v_2 : v_1 v_3 v_6
v_3 : v_4 v_5 v_2 v_1
v_4 : v_5 v_3
v_5 : v_6 v_1 v_3 v_4
v_6 : v_2 v_5

Figura 3.4

Etapa 2

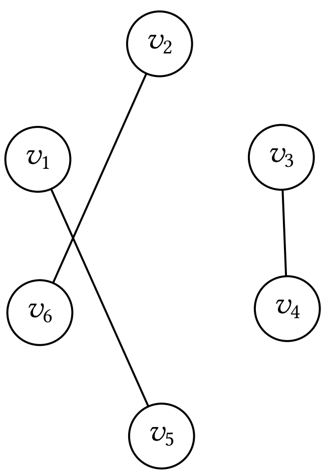
Primeiramente, note que G_1 não está em nenhum caso degenerado. Agora, o algoritmo prossegue buscando uma rotação que será, em seguida, removida. Aplicando o algoritmo para encontrar rotações (demonstração do lema 9) para cada vértice, é possível verificar que a única rotação exposta no momento é $\rho_1 = (v_1, v_5), (v_4, v_3)$. Ao remover esta rotação, são removidas as arestas v_3v_1, v_3v_2, v_3v_5 e v_5v_4. Abaixo temos representado o grafo de preferências que resulta dessa operação.



$$\begin{array}{lcl} v_1 & : & v_5 \ v_2 \\ v_2 & : & v_1 \ v_6 \\ v_3 & : & v_4 \\ v_4 & : & v_3 \\ v_5 & : & v_6 \ v_1 \\ v_6 & : & v_2 \ v_5 \end{array}$$

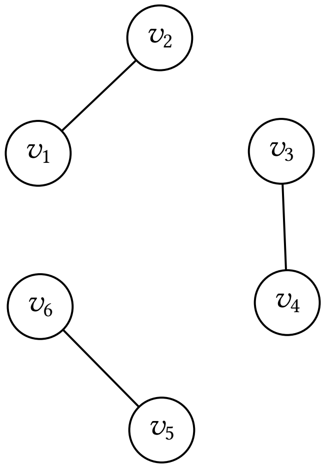
Figura 3.5

Note que nenhum vértice se tornou isolado. Assim, o algoritmo prossegue buscando outra rotação exposta. Desta vez, temos duas rotações expostas: $\rho_2 = (v_2, v_6), (v_5, v_1)$ e $\rho_3 = (v_1, v_2), (v_6, v_5)$. O emparelhamento estável devolvido pelo algoritmo depende da escolha da rotação a ser removida. As figuras 3.6 e 3.7 correspondem aos grafos de preferências resultantes ao se remover ρ_2 e ρ_3, respectivamente. Em ambos os casos, o grafo de preferências obtido corresponde a um emparelhamento estável.



$$\begin{array}{lcl} v_1 & : & v_5 \\ v_2 & : & v_6 \\ v_3 & : & v_4 \\ v_4 & : & v_3 \\ v_5 & : & v_6 \\ v_6 & : & v_2 \end{array}$$

Figura 3.6: *Grafo de preferências resultante da remoção de $\rho_2 = (v_2, v_6), (v_5, v_1)$ do grafo da figura 3.5.*



$v_1 : v_2$
$v_2 : v_1$
$v_3 : v_4$
$v_4 : v_3$
$v_5 : v_6$
$v_6 : v_5$

Figura 3.7: *Grafo de preferências resultante da remoção de* $\rho_3 = (v_1, v_2), (v_6, v_5)$ *do grafo da figura 3.5.*

Capítulo 4

Conclusão

O presente estudo teórico nos permitiu aplicar os conceitos de Algoritmos e Teoria dos Grafos normalmente encontrados em um currículo de uma graduação em Ciência da Computação. Vale notar que, a partir de conceitos elementares, como o de emparelhamento estável e de grafos de preferências, foi possível fazer uma análise profunda e rigorosa de dois algoritmos: o algoritmo de Gale-Shapley e o algoritmo de Irving. Sendo o primeiro, mais simples, mas não menos relevante, e, o segundo, mais sofisticado.

Além disso, usando conceitos abstratos de Teoria da Ordem, conseguimos concluir a existência do emparelhamento A-ótimo por meio de um raciocínio puramente não-construtivo. Isso evidencia que o estudo de áreas puramente abstratas, como Álgebra Abstrata, não deve ser negligenciado até mesmo no estudo de uma área com um teor mais construtivo, como a de Algoritmos.

A investigação aqui presente em nenhum momento teve a intenção de ser exaustiva e nem teria como ser. Ao leitor interessado em se aprofundar nos temas aqui discutidos, sugere-se a leitura de [5] e de [3]. Para o leitor interessado em expandir o seu conhecimento na área de pesquisa de emparelhamentos estáveis, vale mencionar um tema que tem forte relação com o conteúdo deste material e vem sendo alvo de muitos estudos ultimamente: o dos emparelhamentos populares ([8], [6]).

Referências

[1] A. Bondy e U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011. isbn: 9781846289699 (citado na pg. 2).

[2] B.A. Davey, H.A. Priestley e H.A.P. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press, 2002. isbn: 9780521784511. url: https://books.google.com.br/books?id=vVVTxeuiyvQC.

[3] M. David. *Algorithmics Of Matching Under Preferences*. Series On Theoretical Computer Science. World Scientific Publishing Company, 2013. isbn: 9789814425261 (citado na pg. 41).

[4] D. Gale e L. S. Shapley. "College Admissions and the Stability of Marriage". Em: *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), pgs. 9–15. doi: 10.1080/00029890.1962.11989827 (citado nas pgs. 1, 6).

[5] Dan Gusfield e Robert W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1989. isbn: 0-262-07118-5 (citado nas pgs. 1, 10, 25, 41).

[6] Chien-Chung Huang e Telikepalli Kavitha. "Popular Matchings in the Stable Marriage Problem". Em: *Automata, Languages and Programming*. Ed. por Luca Aceto, Monika Henzinger e Jiří Sgall. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2011, pgs. 666–677. isbn: 978-3-642-22006-7 (citado na pg. 41).

[7] D.E. Knuth. *Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms*. CRM proceedings & lecture notes. American Mathematical Soc. isbn: 9780821870129 (citado na pg. 25).

[8] Krishnapriya A M, Meghana Nasre, Prajakta Nimbhorkar e Amit Rawat. *How good are Popular Matchings?* 2018. arXiv: 1805.01311 [cs.GT] (citado na pg. 41).

[9] Sara Robinson. "Are medical students meeting their (best possible) match". Em: *SIAM News* 36.3 (2003), pgs. 8–9 (citado na pg. 18).

[10] Szestopalow, Michael Jay. *Properties of Stable Matchings*. 2010.