Emparelhamentos estáveis em grafos de preferências

Thiago Estrela Montenegro   Orientador: Carlos Eduardo Ferreira

Departamento de Ciência da Computação, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

Motivação

A motivação para o presente trabalho advém dos dois seguintes problemas.

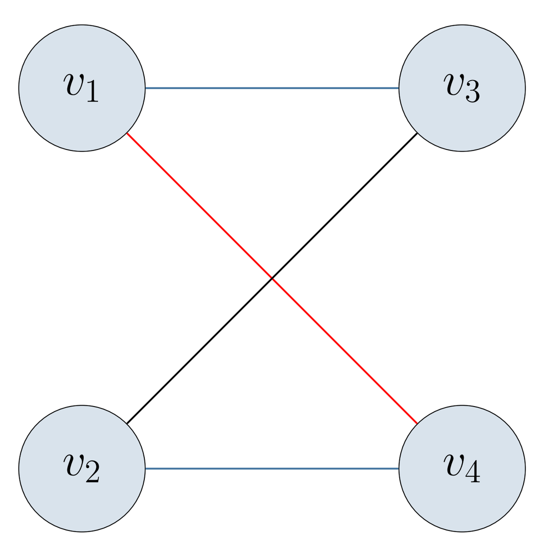
1. **O problema do casamento estável**. O problema consiste em casar cada um de n homens com alguma de n mulheres de modo que não haja um homem e uma mulher que preferem um ao outro do que os seus parceiros.
2. **O problema dos colegas de quarto**. Temos n quartos e $2n$ pessoas. Cada quarto acomoda no máximo 2 pessoas. O problema consiste em acomodar as $2n$ pessoas nesses n quartos de modo que não existam duas pessoas acomodadas em quartos diferentes que prefiram um ao outro aos seus colegas de quarto.

Algoritmos para resolver esses problemas de caráter mais abstrato são utilizados para resolver vários problemas concretos de grande interesse prático, tais como:

- Processos seletivos de admissão a universidades (Sisu, por exemplo).
- Seleção de residentes por hospitais.
- Alocação de doadores de órgãos a pacientes que necessitam de um transplante.

Conceitos fundamentais

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para cada vértice v, uma **lista de preferências** de v é uma ordenação total L_v dos vértices adjacentes a v. $G = (V, E, L)$ é denominado um **grafo de preferências**, onde L é o conjunto de todas as listas de preferências de vértices de G.
- Seja M um emparelhamento de um grafo de preferências G. Para cada vértice v coberto por M, defina $M(v)$ como o seu parceiro em M. Dizemos que $xy \in E(G)$ é uma **aresta bloqueadora** com respeito a M se $xy \notin M$ e x prefere y a $M(x)$ e y prefere x a $M(y)$.
- Um emparelhamento M de um grafo de preferências G é dito **estável** se não existe aresta de G que é bloqueadora com respeito a M.



Listas de preferências

$v_1 : v_4 \ v_3$
$v_2 : v_3 \ v_4$
$v_3 : v_2 \ v_1$
$v_4 : v_1 \ v_2$

Figura 1. a aresta v_1v_4 (aresta vermelha) é aresta bloqueadora com respeito a $M = \{v_1v_3, v_2v_4\}$ (arestas azuis).

Algoritmo de Gale-Shapley

O Algoritmo de Gale-Shapley resolve em tempo linear o problema de encontrar um emparelhamento estável em um grafo de preferências bipartido. Ele consome no pior caso tempo $O(m)$, onde m é o número de arestas do grafo.

Podemos descrever o algoritmo da seguinte forma. Suponha que G é um grafo de preferências bipartido e (A, B) é uma bipartição de G. Em cada iteração, um vértice a de A não emparelhado faz um pedido para o seu vértice vizinho b preferido que ainda não o rejeitou. Temos dois casos:

- (b não está emparelhado): nesse caso, a e b se emparelham.
- (b está emparelhado com um vértice a'): nesse caso, se b prefere a a a', ele desfaz o emparelhamento com a' e se emparelha com a. Caso contrário, ele rejeita o pedido de a.

Em geral, um mesmo grafo de preferências G possui vários emparelhamentos estáveis distintos. O emparelhamento M devolvido pelo Algoritmo de Gale-Shapley possui a seguinte propriedade especial: para cada vértice $a \in A$, a está com o melhor parceiro que ele poderia ter em um emparelhamento estável de G. Por outro lado, cada vértice $b \in B$ está com o seu pior parceiro possível. Por esses motivos, tal emparelhamento é chamado de A-**ótimo** e também de B-**péssimo**.

Teorema dos hospitais rurais

Teorema dos hospitais rurais: Se um vértice é coberto por um emparelhamento estável, então ele é coberto por qualquer outro emparelhamento estável.

Nos Estados Unidos, existe um órgão, o National Resident Matching Program (NRMP), responsável por realizar a alocação de seus médicos residentes aos hospitais. O Órgão utiliza um algoritmo que, em essência, é o de Gale-Shapley de encontrar um emparelhamento estável. Lá, em geral, o número de vagas é maior que o número de aplicantes e, portanto, existem hospitais onde nem todas as suas vagas são preenchidas. Devido a uma preferência dos residentes aos hospitais urbanos, os emparelhamentos estáveis encontrado pelo algoritmo em geral ocasionava uma grande quantidade de vagas não preenchidas nos hospitais rurais [3]. Isso levantou a questão de se talvez fosse possível alterar o algoritmo de modo a fazê-lo encontrar um emparelhamento estável onde o número de vagas preenchidas nos hospitais rurais fosse maior. O Teorema dos Hospitais Rurais responde a essa questão negativamente (e daí o seu nome).

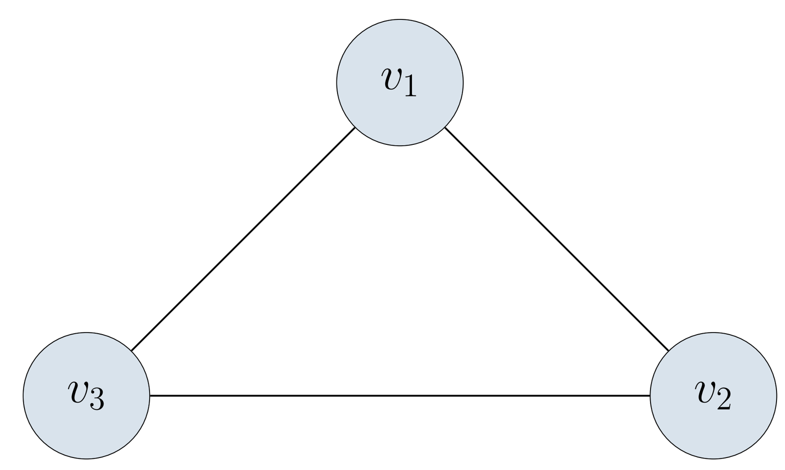
Estrutura algébrica dos emparelhamentos estáveis

Um conjunto S munido de uma ordem parcial $\leq$ definida em S é dito um **reticulado** se todo $\{a, b\} \subset S$ possui supremo e ínfimo. Denotamos o ínfimo e o supremo de $\{a, b\}$ por $a \wedge b$ e $a \vee b$, respectivamente. Um reticulado é dito **distributivo** quando $\vee$ é distributivo em relação a $\wedge$ e vice-versa.

Seja G um grafo de preferências com bipartição (A, B) e denote por S o conjunto dos seus emparelhamentos estáveis. É possível definir uma ordem parcial $\leq$ em S da seguinte forma: Dados dois emparelhamentos estáveis M_1, M_2 de G, dizemos que $M_1 \leq M_2$ se todo vértice de A tem um parceiro em M_2 pelo menos tão bom quanto o de M_1. Conway [2] provou que S munido dessa ordem é um reticulado distributivo. A partir desse fato, podemos provar a existência do emparelhamento A-ótimo usando um argumento puramente algébrico.

Algoritmo de Irving

Para grafos de preferências bipartidos, o Algoritmo de Gale-Shapley garante a existência de ao menos um emparelhamento estável. No caso geral, isso nem sempre é verdade. A figura 2 ilustra um grafo de preferências que não admite emparelhamentos estáveis.



Listas de preferências

$v_1 : v_3 \ v_2$
$v_2 : v_1 \ v_3$
$v_3 : v_2 \ v_1$

Figura 2. Exemplo de grafo de preferências que não apresenta emparelhamentos estáveis.

Knuth [2] chegou a conjecturar que o problema de decidir se um grafo de preferências arbitrário possui algum emparelhamento estável seria NP-completo. No entanto, Irving [1] refutou essa hipótese, elaborando um algoritmo que, em tempo linear, decide se um grafo de preferências possui um emparelhamento estável e, em caso positivo, devolve um.

Informações e contato

Página do trabalho: `https://linux.ime.usp.br/~thiagestrela/mac0499/`

Email: thiago.montenegro@usp.br

Referências

[1] Robert W. Gusfield, Dan e Irving.
The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.
MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1989.

[2] D.E. Knuth.
Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms.
CRM proceedings & lecture notes. American Mathematical Soc.

[3] Alvin E. Roth.
On the allocation of residents to rural hospitals: A general property of two-sided matching markets.
Econometrica, 54(2):425–427, 1986.