

Emparelhamentos em grafos com listas de preferências

Thiago Estrela Montenegro
Supervisor: Carlos Eduardo Ferreira

5 de Maio de 2019

1 Motivação

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para cada vértice v , uma **lista de preferências** de v , L_v é uma ordenação total dos vértices adjacentes à v . Se todo vértice de G possui uma lista de preferências, $G = (V, E, L)$ é denominado um **grafo com lista de preferências**, onde L é o conjunto de todas as listas de preferências de vértices de G .

Como exemplos de problemas, que podem ser modelados lançando-se mão da estrutura acima definida acima, temos:

1. **O Problema do Casamento Estável.** O problema consiste em casar n homens e n mulheres de modo que não exista um par consistindo de um homem e uma mulher tal que cada um prefira o outro ao seu parceiro. Esse problema pode ser traduzido como o de achar um emparelhamento estável em um grafo bipartido com listas de preferências. Gale e Shapley [1] provaram que esse problema sempre possui solução e descreveram um algoritmo que o resolve. Tal algoritmo passou a ser conhecido por Algoritmo de Gale-Shapley.
2. **O Problema dos Colegas de Quarto.** Temos n quartos e $2n$ pessoas. Cada quarto acomoda no máximo 2 pessoas. O Problema consiste em acomodar as $2n$ pessoas nesses n quartos de modo que não existam duas pessoas acomodadas em quartos diferentes que prefiram um ao outro aos seus parceiros. Tal problema pode ser modelado como o de achar um emparelhamento estável em um grafo com listas de preferências. Diferente do caso do problema anterior, tal emparelhamento nem sempre existe. Irving [2] formulou um algoritmo que determina a existência de um emparelhamento estável e, caso exista, devolve um.

Os algoritmos que resolvem os problemas acima são bastante aplicados na prática. O National Residency Matching Program [3] é um programa no Estados Unidos que utiliza o Algoritmo de Gale-Shapley para realizar a alocação dos residentes aos hospitais. Outra aplicação interessante é na alocação de doadores de rins à pacientes que necessitam realizar um transplante [4].

Além da riqueza de aplicações práticas, os problemas acima possuem uma estrutura matemática muito rica. Uma evidência disso é o fato de o conjunto dos emparelhamentos estáveis, munido de uma relação de ordem natural, formar uma estrutura algébrica denominada reticulado distributivo. Tal estrutura foi muito explorada por Knuth [5].

2 Objetivo

Neste trabalho pretendo realizar um estudo de natureza teórica dos seguintes temas que envolvem grafos com listas de preferências:

1. Emparelhamentos estáveis em grafos bipartidos com listas de preferências.
2. Emparelhamentos estáveis em grafos gerais com listas de preferências.
3. Emparelhamentos populares.

Pretendo provar, na medida do possível, implementações ao menos dos algoritmos mais básicos. No entanto, o foco do trabalho será na análise teórica dos algoritmos e no estudo da estrutura matemática desses temas.

Referências

- [1] D. Gale and L. S. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriage*, American Mathematical Monthly 69 9-15, 1962.
- [2] Irving, Robert, *An efficient algorithm for the “stable roommates” problem*, Journal of Algorithms, 6:577–595, 1985.
- [3] <http://www.nrmp.org>, National Resident Matching Program website.
- [4] D. F. Manlove and G. O’Malley, *Paired and altruistic kidney donation in the UK: Algorithms and experimentation*, ACM Journal of Experimental Algorithmics, 19(1), 2014.
- [5] D. Knuth, *Mariages Stables*, Les Presses de L’Universite de Montreal, 1976.